

T H È M E N ° 3

Intégrales

9 MARS 2025

OBJECTIF : Réviser les intégrales impropres \triangleright **III** et les intégrales à paramètre \triangleright **XIII** mais aussi le théorème de la convergence dominée \triangleright **V.11**. Vous pouvez rédiger et me rendre les exercices 8 & 9 dans la case *Thème 3* du Cahier de Prépa.

A • Rédiger :

- une intégrale impropre $\int_{]0,+\infty[}$ des deux côtés converge *ssi* les deux intégrales $\int_{]0,42]}$ et $\int_{]42,+\infty[}$ convergent (et non pas *pas ssi* leur somme converge) ;
- on intègre par parties \triangleright **III.19** sans oublier l'hypothèse \mathcal{C}^1 des deux fonctions du crochet et, si l'intégrale est impropre, de poser une « barrière » (ou de montrer au préalable que le terme entre crochets a une limite finie) ;
- on change de variable \triangleright **III.22** sans oublier l'hypothèse \mathcal{C}^1 du *CDV* et aussi, si l'intégrale est impropre, de poser une « barrière » (ou d'invoquer la stricte monotonie du *CDV*) ;

B • Se rappeler :

- qu'une intégrale « n'est même pas impropre » si on intègre une fonction continue sur un segment ;
- ce qu'est une intégrale faussement impropre \triangleright **III.8 & TD3.6q.1** et qu'une intégrale n'est jamais faussement impropre en $+\infty$ ni en $-\infty$;
- que la divergence grossière d'une intégrale, ça n'existe pas \triangleright **III.7**, mais que ça existe quand même si la fonction est uniformément continue \triangleright **TD5.7** ;
- la subtile définition de *cpm* sur un intervalle \triangleright **III.2 & TD3.3 q.1**.

C • Se soucier des notations quand on utilise les théorèmes \triangleright **XIII.4 de continuité et \triangleright **XIII.6** de dérivation d'une intégrale à paramètre :**

- ne pas confondre la fonction g et le réel $g(x)$, c'est la fonction g qui est continue ou dérivable ;
- ne pas confondre la fonction f et la fonction $t \mapsto f(x, t)$ ou $x \mapsto f(t, x)$;
- de même, ne pas confondre les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ ou $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$;
- écrire $T =]0; 42]$ si l'intégrale $\int_0^{42} f(x, t) dt$ est impropre en 0 et pas en 42 ;
- si $X =]0, +\infty[$, alors il faut parfois le changer en $X_a = [a, +\infty[$ ou $X_b =]0, b]$ voire $X_{a,b} = [a, b]$ pour réussir à dominer la fonction f ou $\frac{\partial f}{\partial x}$.

D • Retravailler la fonction Gamma d'Euler \triangleright **XII.1,3,5,7&9 . On a aussi prouvé l'identité d'Euler \triangleright **TD5.6**. Cet exercice était tiré de la partie III du sujet **CENTRALE SUPÉLEC MATHS 1 PSI 2011**. Vous pouvez tenter les parties IV et V qui utilisent des intégrales à paramètre \triangleright **m11cs1e.pdf & m11cs1cb.pdf**.**

E • Pour établir un équivalent à partir d'une relation fonctionnelle, on utilise tantôt la continuité, tantôt la monotonie \triangleright **XIII.5, Colle10.2, Colle19.1 .**

F • On dit qu'une fonction f est **intégrable sur un intervalle I , et on note $f \in L^1(I)$, si $\int_I |f(t)| dt$ est convergente, où $|f(t)|$ est la valeur absolue si $f(t) \in \mathbb{R}$ ou le module si $f(t) \in \mathbb{C}$ comme dans l'exercice suivant.**

Exercice 8 (LA GAUSSIENNE & LA TRANSFORMÉE DE FOURIER). Soit E l'ensemble des fonctions φ continues de \mathbb{R} vers \mathbb{C} telles que la fonction $t \mapsto t^3 \cdot \varphi(t)$ est bornée.

1. Vérifier que E est un \mathbb{C} -sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

2. Montrer que, si $\varphi \in E$, alors la fonction $g : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{-i2\pi tx} dt$ appelée la *transformée de Fourier* de φ , est définie sur \mathbb{R} , qu'elle est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -i2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)e^{-i2\pi tx} dt.$$

3. Soit $\varphi(t) = e^{-\pi t^2}$. Montrer que :
- (a) la fonction φ appartient à E ;
 - (b) sa transformée de Fourier g est une solution de l'équation différentielle $g'(x) = -2\pi xg(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
 - (c) φ est égale à sa transformée de Fourier g (on utilisera la valeur $\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ de l'**intégrale gaussienne**
▷ **TD13.5 & exo 2 du Kdo du 13/12/2024**).

À propos des espaces de Lebesgue : se rappeler que $L^1(I)$ est un *ev* mais pas un *evn* alors que $L^1(I) \cap \mathcal{C}(I)$ est un *evn* ▷ **XI.3.3** (grâce au « théorème de l'intégrale nulle »). De même ▷ **VIII.4&7**, $L^2(I)$ est un *ev* car le produit de deux fonctions de $L^2(I)$ est dans $L^1(I)$. N'est pas un espace préhilbertien $\boxed{\text{B}} \boxed{\text{S}} \boxed{\text{P}}$ mais $\boxed{\mathcal{D}}$. Alors que $L^2(I) \cap \mathcal{C}(I)$ en est un (grâce au « théorème de l'intégrale nulle »). Voir aussi $\ell^1 \subset \ell^2 \subset \ell^\infty$ ▷ **Colle16.3**.

G • L'intégrale de Dirichlet est convergente ▷ **III.20** mais elle n'est pas absolument convergente ▷ **III.21**. On sait même la calculer ▷ **TD3.6q.8** et c'est une occasion de réviser le lemme de Riemann-Lebesgue ▷ **TD3.6q.5**. Un deuxième calcul ▷ **TD13.13q.8** utilise la transformée de Laplace (l'exercice ▷ **TD13.2** aussi).

Exercice 9. On note E l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tout réel $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ soit intégrable sur \mathbb{R}_+ . Pour tout f dans E , on appelle TRANSFORMÉE DE LAPLACE de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout réel $x > 0$ par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt.$$

— **Partie I : propriétés de la transformation de Laplace** —

(tiré de **CCP MATHS 1 MP 2011**)

1. Soit f une fonction continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ .
 - (a) Montrer que f appartient à E .
 - (b) Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est prolongeable par continuité en 0.
2. Soit f une fonction continue et bornée sur \mathbb{R}_+ .
 - (a) Montrer que f appartient à E .
 - (b) Montrer que $\mathcal{L}(f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
3. Soient f dans E et n dans \mathbb{N} . On considère la fonction $g_n : t \mapsto t^n f(t)$ de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} . Montrer que la fonction g_n est un élément de E .
4. Démontrer que, pour tout $f \in E$, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et que : $[\mathcal{L}(f)]' = -\mathcal{L}(g_1)$.
5. Démontrer par récurrence que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, pour tout f dans E , la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe \mathcal{C}^n sur $]0, +\infty[$ et que $[\mathcal{L}(f)]^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}(g_n)$.
6. Justifier que E est un espace vectoriel et que \mathcal{L} est une application linéaire de E vers $\mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R})$.
7. THÉORÈME DE LA VALEUR FINALE — On suppose dans cette question que f est une fonction continue sur \mathbb{R}_+ telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ell$, où ℓ est un réel.
 - (a) Démontrer que f est bornée.
 - (b) Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0 et $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par : $h_n(x) = e^{-x} f(\frac{x}{a_n})$. Démontrer que : $a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \int_0^{+\infty} h_n(x) dx$.
 - (c) Montrer que : $x \mathcal{L}(f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \ell$.

— Partie II : un calcul de l'intégrale de Dirichlet —

(tiré de CCP MATHS PSI 2017)

Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$.

1. Montrer que f appartient à E . Étudier $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x)$.
2. Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est une solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x} \quad (*)$$

3. (a) Justifier que $\alpha(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\beta(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ sont définis pour tout $x > 0$.
(b) Vérifier que les fonctions α et β sont dérivables sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$:

$$\alpha'(x) \cos(x) + \beta'(x) \sin(x) = 0 \quad \text{et} \quad \beta'(x) \cos(x) - \alpha'(x) \sin(x) = \frac{1}{x}.$$

- (c) Montrer que la fonction $x \mapsto \alpha(x) \cos(x) + \beta(x) \sin(x)$ est une solution de (*) sur $]0, +\infty[$.
(d) En déduire que la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$ est une solution de (*) sur $]0, +\infty[$.
4. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall x > 0, \mathcal{L}(f)(x) = a \cos(x) + b \sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$$

5. En effectuant une intégration par parties, montrer que, pour tout $x > 0$:

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt \right| \leq \frac{2}{x}.$$

6. En déduire que, pour tout $x > 0$:

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$$

7. Montrer que $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} \right) dt$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+ .
8. Montrer que $\int_0^1 \left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} \right) dt$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+ .
9. Déduire des questions précédentes que : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.