

ANALYSE: La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , qui est un ouvert, donc: si la fonction  $f$  possède un extremum local en  $(x, y)$ , alors le point  $(x, y)$  est un point critique.

Exercice n° 8:

Hyp Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .  
1) Déterminons les points critiques de  $f$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 9 = 0 \\ 3x = 0 \end{cases}$$

$\alpha$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 0 \end{cases}$$

donc l'unique point critique de  $f$ .

$$f(0, 3) = 9 - 18 = -9$$

SYNTHÈSE:

$$\begin{aligned} f(0+h, 3+k) &= h^2 + h(3+k) + |3+k|^2 - 3h - 6 \times (3+h) \\ &= -9 + h^2 + hk + k^2 \\ &= -9 + \left(h + \frac{1}{2}k\right)^2 + \frac{3}{4}k^2 \geq -9. \end{aligned}$$

Donc  $-9$  est un minimum et il est global.

Hyp 2) La fonction  $\ln$  est ~~définie~~ de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , par conséquent, de classe  $\mathcal{C}^1$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ , qui est un ouvert.

ANALYSE: la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  qui est de classe  $\mathcal{C}^1$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Déterminons ses points critiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln^2 x + x \cdot \frac{2}{x} \ln x + y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln^2 x + 2 \ln x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (\text{car } x > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \ln x + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = e^{-2} \\ y = 0 \end{cases}$$

La fonction  $f$  possède  $\checkmark$  donc 2 points critiques,  $(1, 0)$  et  $(e^{-2}, 0)$

$$\begin{aligned} f(1, 0) &= 0 \\ f(e^{-2}, 0) &= e^{-2} \times (-2)^2 = 4e^{-2} \end{aligned}$$

SYNTHÈSE :

$f(1, 0) = 0$  et  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) \geq 0$ .

Donc 0 est un minimum et il est global.

$$\begin{aligned} f(e^{-2}+h, 0+k) &= (e^{-2}+h) \cdot [\ln^2(e^{-2}+h) + k^2] \\ &= (e^{-2}+h) \left\{ \left[ -2 + \ln(1+he^2) \right]^2 + k^2 \right\} \end{aligned}$$

$$= (e^{-2} + h) \left\{ -4 - 4 \ln(1 + he^2) + \ln^2(1 + he^2) + k^2 \right\}$$

$$= 4e^{-2} + o(h) + o(k) - e^2 h^2 + k^2 + o(h^2)$$

$\triangleright$  m

$$f(e^{-2} + 0, 0 + h) = 4e^{-2} + h^2 > 4e^{-2}, \forall h \neq 0, \text{ donc}$$

$4e^{-2}$  n'est pas un maximum local.

$$\text{Et } f(e^{-2} + h, 0 + 0) = 4e^{-2} - e^2 h^2 + o(h^2)$$

$< 4e^{-2}$  si  $h \neq 0$  est assez petit,

donc  $4e^{-2}$  n'est pas un minimum local.

Il n'y a donc pas d'extremum local en  $(e^{-2}, 0)$ .