Corrigé de la colle n° 18

Endomorphismes remarquables d'un espqace euclidien

10 mars 2025

Exercice 1. Soient E un espace euclidien et $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E. On dit qu'un endomorphisme f conserve l'orthogonalité si :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \langle x|y\rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x)|f(y)\rangle = 0.$$

1. On suppose que f est un endomorphisme conservant l'"orthogonalité.
   (a) Soient i et j distincts dans $[\![1,n]\!]$. Calculer $\langle f(e_i+e_j)|f(e_i-e_j)\rangle$ et en déduire que $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.
   (b) En déduire qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x)|f(y)\rangle = \lambda^2\langle x|y\rangle$.
2. Montrer qu'un endomorphisme f conserve l'orthogonalité si, et seulement si, il existe un scalaire λ et une isométrie vectorielle g tels que $f = \lambda g$.

---

1. (a) $\langle f(e_i+e_j)|f(e_i-e_j)\rangle = \langle f(e_i)+f(e_j)|f(e_i)-f(e_j)\rangle = \|f(e_i)\|^2 - \|f(e_j)\|^2$ sans aucune hypothèse.
   Si $i \neq j$, alors $(e_i+e_j) \perp (e_i-e_j)$ car $\langle e_i+e_j|e_i-e_j\rangle = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2$ et la base est orthonormée. Or, par hypothèse, f conserve l'orthogonalité, d'où $f(e_i+e_j) \perp f(e_i-e_j)$.
   On en déduit que $\|f(e_i)\|^2 - \|f(e_j)\|^2 = 0$, donc $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.

   (b) De la question précédente, on déduit que $\|f(e_i)\|$ ne dépend pas de i. Notons λ cette constante. Alors, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,
   $$\langle f(e_i)|f(e_j)\rangle = \lambda^2\langle e_i|e_j\rangle$$
   (c'est vrai si $i=j$ par définition de λ ; c'est aussi vrai si $i \neq j$ car $0 = \lambda^2 \times 0$). C'est encore vrai pour deux vecteurs $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ quelconques car :
   $$\begin{aligned} \langle f(x)|f(y)\rangle &= \langle \sum_i x_i f(e_i)| \sum_j y_j f(e_j)\rangle \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j \langle f(e_i)|f(e_j)\rangle \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j \lambda^2 \delta_{ij} \\ &= \lambda^2 \sum_i x_i y_i \\ &= \lambda^2\langle x|y\rangle \end{aligned}$$

2. Si $f = \lambda g$ et g est une isométrie, alors f conserve l'orthogonalité car : pour tous vecteurs x et y dans E, $\langle \lambda g(x)|\lambda g(y)\rangle = \lambda^2\langle g(x)|g(y)\rangle = \lambda^2\langle x|y\rangle$ car g est une isométrie. On en déduit que : $x \perp y \implies \lambda g(x) \perp \lambda g(y)$.
   Réciproquement, si f conserve l'orthogonalité, alors il existe un scalaire λ tel que :
   $$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x)|f(y)\rangle = \lambda^2\langle x|y\rangle \qquad (*)$$
   d'après la question précédente.
   Ou bien $\lambda \neq 0$: on peut alors définir $g = \frac{1}{\lambda} f$ de sorte que $\langle g(x)|g(y)\rangle = \langle x|y\rangle$ daprès $(*)$, donc g est une isométrie et $f = \lambda g$.
   Ou bien $\lambda = 0$: alors, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|^2 = 0^2\|x\|^2 = 0$ daprès $(*)$, d'où $f(x) = 0_E$, d'où f est l'application nulle et on peut aussi l'écrire $f = 0\,\mathrm{id}$ qui est le produit du scalaire 0 et de l'isométrie id.

Exercice 2. Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\,)$ une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. Soient

$$\vec{u}\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) \quad , \quad \vec{v} = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big) \quad \text{et} \quad \vec{w} = \Big(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\Big).$$

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit f la rotation d'angle θ autour de l'axe dirigé et orienté par $\vec{u}$. Montrer que $\big(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\big)$ est une base orthonormée directe. Écrire la matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
2. Ecrire la matrice de passage de $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ vers $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et la matrice de passage de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ vers $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
3. On suppose que $f(\vec{\imath}) = \vec{k}$. En déduire l'angle θ de la rotation f.

Voir le corrigé manuscrit ci-dessous.

Exercice 3. Soit E un espace euclidien. On appelle **réflexion** une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E.

1. Soit s une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan H. Montrer que, pour tout vecteur $x \in E$, le vecteur $x - s(x)$ est orthogonal à H.
2. Soit un vecteur non nul $a \in E$. Montrer que l'application

$$s \,:\, E \to E,\; x \mapsto x - 2\frac{\langle a|x\rangle}{\|a\|^2}a$$

est une réflexion.

3. Soient u et v deux vecteurs distincts de E tels que $\|u\| = \|v\|$. Montrer qu'il existe une unique réflexion s telle que $s(u) = v$.

---

1. Le sous-espace vectoriel H étant de dimension finie, $H \oplus H^\perp = E$. Pour chaque vecteur $x \in E$, il existe un unique $(u, v) \in H \times H^\perp$ tel que $x = u + v$. Et cette décomposition est adaptée à notre problème car $s(x) = u - v$. D'où $x - s(x) = (u + v) - (u - v) = 2v \in H^\perp$. Donc le vecteur $x - s(x)$ est orthogonal à H.
2. Pour chaque $x \in E$, on pourrait calculer $s \circ s(x)$ et constater que $s \circ s(x) = x$, ce qui prouverait que s est une symétrie. Mais on peut s'en dispenser car la méthode ci-dessous le prouve aussi et même plus.
   Soit H l'hyperplan orthogonal au vecteur a (non nul). À nouveau, on utilise la décomposition $E = H \oplus H^\perp$ adaptée à notre problème (ici $H^\perp$ est la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(a)$) :
   - d'une part, $s(a) = a - 2\frac{\langle a|a\rangle}{\|a\|^2}a = -a$;
   - d'autre part, pour tout $v \perp H$, $s(v) = v - 2\frac{\langle a|x\rangle}{\|a\|^2}a = v$ car $\langle a|x\rangle = 0$.

   Donc s est la réflexion par rapport à l'hyperplan H.
3. Analyse (pour prouver l'unicité) : si $s(u) = v$, alors $u - v = u - s(u) \perp H$ d'après la question 1, d'où l'unicité de H et donc l'unicité de la réflexion par rapport à H.
   Synthèse (pour prouver l'existence) : soient $a = u - v$ (non nul car u et v sont supposés distincts) et H l'hyperplan orthogonal au vecteur a. L'application s de la question 2 est alors la réflexion par rapport à H. Reste à montrer que $s(u)$ est bien égal à v, grâce à l'hypothèse $\|u\| = \|v\|$:

$$s(u) = u - 2\frac{\langle u - v|u\rangle}{\|u - v\|^2}(u - v) = v \quad \text{car} \quad 2\frac{\langle u - v|u\rangle}{\|u - v\|^2} = 1.$$

   En effet, $\langle u - v|u\rangle = \|u\|^2 - \langle v|u\rangle$ au numérateur et $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u|v\rangle + \|v\|^2 = 2\|u\|^2 - 2\langle u|v\rangle$ car $\|u\| = \|v\|$.

(Héloïse)

Corrigé de l'exercice n°2

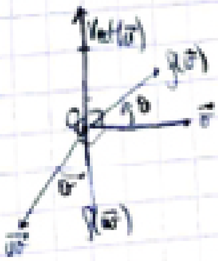
1) $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$ $\quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ $\quad \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$

$\|\vec{u}\| = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2} = 1$

$\|\vec{v}\| = 1$

$\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1-1) = 0$ d'où $\vec{u} \perp \vec{v}$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = +\vec{w}$



donc $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une b.o.n. directe

Comme l'axe de rotation est $(O, \vec{u})$: $f(\vec{u}) = \vec{u}$

$$A = [f]_{(\vec{u},\vec{v},\vec{w})} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(\vec{u}) & f(\vec{v}) & f(\vec{w}) \end{array} & \end{array}$$

oui

$$P = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{array} & \end{array}$$

$P \in SO_3(\mathbb{R})$ car P transforme la b.o.n.d $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ en la b.o.n.d $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$

D'où $P^{-1} = P^T = $

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{array} & \end{array}$$

oui

3) $f(\vec{i}) = \vec{k} \iff f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{u} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{w}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{u} + \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{w}$

" $\iff \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{u}} + \frac{1}{\sqrt{2}} f(\vec{v}) - \frac{1}{\sqrt{6}} f(\vec{w}) = \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{u}} + \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{w}$

" $\iff \begin{cases} /\vec{v} : \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta = 0 \\ /\vec{w} : \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta - \frac{1}{\sqrt{6}}\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{6}} \end{cases}$

" $\iff \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 2 \\ \sqrt{3}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$ $\quad L_1 \leftarrow \sqrt{2}L_1 + \sqrt{6}L_2$, $\; L_2 \leftarrow \sqrt{6}L_1 - \sqrt{2}L_2$

" $\iff \begin{cases} 4\sin\theta = 2\sqrt{3} \\ 4\cos\theta = -2 \end{cases}$

$f(\vec{i}) = \vec{k} \iff \begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \boxed{\theta = \frac{2\pi}{3}}$

OUI