Corrigé de la colle n° 19

Intégrales à paramètre

11 mars 2025

Exercice 1. Soit $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

1. Montrer que le réel $F(x)$ est défini si, et seulement si, $x > 0$.
2. Montrer que la fonction $F\ :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ ainsi définie est décroissante.
3. Montrer que $F(x) + F(x+1) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.
4. Montrer que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ▷ **Trois méthodes dans le corrigé**.
5. Calculer $F(1)$ et en déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$.
6. Montrer que la fonction F est continue sur $]0, +\infty[$.
7. Montrer que $F(x)$ est équivalent à $\frac{1}{x}$ quand x tend vers 0^+ ▷ **Deux méthodes dans le corrigé**.
8. Montrer que : $\forall x > 1,\ F(x) + F(x+1) \leq 2F(x) \leq F(x-1) + F(x)$.
   En déduire un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

---

1. Soit, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [1, +\infty[$, $f(x,t) = \frac{1}{t^x(1+t)}$. L'intégrale $F(x)$ est impropre en $+\infty$. Or $0 \leq f(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{1+x}}$ qui ne change pas de signe. Et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{1+x}}\, dt$ converge si, et seulement si, $1 + x > 1$. L'intégrale $F(x)$ est de même nature et converge donc si, et seulement si, $x > 0$.
2. Soient $x_1 \geq x_2 > 0$. Pour tout $t \in [1, +\infty[$, $f(x_1, t) \leq f(x_2, t)$. En effet, $\ln t \geq 0$ car $t \geq 1$. D'où $-x_1 \ln t \leq -x_2 \ln t$ et $t^{-x_1} \leq t^{-x_2}$ par croissance de l'exponentielle. D'où $F(x_1) \leq F(x_2)$ par croissance de l'intégrale. Donc la fonction F est décroissante.
3. Pour tout $(x,t) \in]0, +\infty[\times [1, +\infty[$, $f(x,t) + f(x+1,t) = \frac{1}{1+t} \cdot \left(\frac{1}{t^x} + \frac{1}{t^{x+1}}\right) = \frac{1}{t^{x+1}}$, d'où

   $F(x) + F(x+1) = \int_1^{+\infty} t^{-1-x}\, dt = \left[\frac{t^{-1-x+1}}{-1-x+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x}$.
4. Trois méthodes :
   — La fonction F est positive et $F(x) + F(x+1) = \frac{1}{x}$ d'après la question 3, d'où $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x}$, donc $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après le théorème des gendarmes.
   — La fonction F posséde une limite ℓ (éventuellement infinie) en $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone car F est décroissante d'après la question 2. Cela permet de passer à la limite dans l'égalité de la question 3 : $\ell + \ell = 0$, donc $\ell = 0$.
   — Soit $x > 1$: pour tout $t \in T$, $0 \leq f(x,t) \leq \frac{1}{t^x}$, d'où $0 \leq F(x) \leq \int_T \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1}$ par croissance de l'intégrale. On conclut avec le théorème des gendarmes.
5. $f(1,t) = \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$. D'où $F(1) = \int_1^{+\infty} f(1,t)\, dt = \left[\ln \frac{t}{1+t}\right]_1^{+\infty} = \ln 2$. De $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ F(k+1) = \frac{1}{k} - F(k)$, on déduit, par récurrence, que : $\forall n \geq 2,\ F(n) = (-1)^n \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2\right]$.

   Or $(-1)^n F(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ car $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après la q. précédente.

   D'où $\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$.

6. La fonction F est continue sur $]0,+\infty[$. En effet, soient $a>0$, $X_a=[a,+\infty[$, $T=[1,+\infty[$, et $f(x,t)=\frac{1}{t^x(1+t)}$ pour tout $(x,t)\in X\times T$:
   - (i) pour tout $x\in X_a$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est *cpm* sur T ;
   - (ii) pour tout $t\in T$, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur X_a ;
   - (iii) pour tout $(x,t)\in X_a\times T$, $|f(x,t)|\leq \frac{1}{t^a(1+t)}$ et $\int_T \frac{1}{t^a(1+t)}\,dt$ converge d'après la question 1.

   D'où la fonction F est continue sur $X_a=[a,+\infty[$. C'est vrai pour tout $a>0$, donc vrai sur $]0,+\infty[$ car la continuité est une propriété locale.
7. Première méthode (en utilisant la décroissance de F pour encadrer $F(x)$) — Pour tout $x>0$, $x+1\geq 1$, d'où (par décroissance de F) : $F(x+1)\leq F(1)$. De plus, la fonction f est positive, d'où (positivité de l'intégrale) $F(x+1)\geq 0$. On en déduit que $0\leq \frac{1}{x}-F(x)\leq F(1)$. On en tire un encadrement de $F(x)$: $\frac{1}{x}-F(1)\leq F(x)\leq\frac{1}{x}$. On divise par $\frac{1}{x}$: $1-xF(1)\leq\frac{F(x)}{1/x}\leq 1$. Quand x tend vers 0^+, les deux « gendarmes » tendent vers 1, donc $F(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}\frac{1}{x}$.

   Seconde méthode (en utilisant la continuité de F) — De l'égalité $F(x)+F(x+1)=\frac{1}{x}$, on tire $xF(x)=1-xF(x+1)$ Or $F(x+1)\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}F(1)$ car la fonction F est continue en 1 d'après la q. précédente, d'où $xF(x+1)\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}0F(1)=0$, donc $xF(x)\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}1$.
8. De la décroissance de F, on déduit que, pour tout $x>1$,
   $F(x+1)\leq F(x)\leq F(x-1)$, d'où $F(x)+F(x+1)\leq 2F(x)\leq F(x-1)+F(x)$. Or $F(x+1)+F(x)=\frac{1}{x}$ et $F(x-1)+F(x)=\frac{1}{x-1}$. On divise par $\frac{1}{x}$: $1\leq 2F(x)\leq\frac{x}{x-1}$. Quand x tend vers $+\infty$, les deux « gendarmes » tendent vers 1, donc $F(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2x}$.

Exercice 2. Soit $F(x)=\displaystyle\int_0^\pi \ln(x^2-2x\cos t+1)\,dt$.

1. Soit $x\in[0,1[$. Montrer que
$$f(x,t)=\ln(x^2-2x\cos t+1)$$
   est défini pour $t\in[0,\pi]$.
2. Montrer que la fonction F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
3. Soit $G(x)=\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{x^2-2x\cos t+1}\,dt$.

   En effectuant le changement de variable $u=\tan\dfrac{t}{2}$, montrer que
$$G(x)=\frac{\pi}{1-x^2}$$
   pour tout $x\in[0,1[$.
4. En déduire $F'(x)$ et $F(x)$ pour tout $x\in[0,1[$.
5. Montrer que la fonction F est définie et continue en 1. En déduire la valeur de
$$\int_0^\pi \ln(1-\cos t)\,dt.$$

---

1. Soit $(x,t)\in[0,1[\times[0,\pi]$: $-1\leq\cos t\leq+1$, d'où $-2x\leq -2x\cos t\leq +2x$, donc $(1-x)^2=x^2-2x+1\leq x^2-2x\cos t+1\leq x^2+2x+1=(1+x)^2$. D'où $(1-x)^2\leq x^2-2x\cos t+1\leq(1+x)^2$. En particulier $0<x^2-2x\cos t+1$, donc le réel $f(x,t)$ est bien défini.
2. Soient $a\in]0,1[$, $X=[0,a]\subset[0,1[$ et $T=[0,\pi]$.
   - (i) Pour chaque $t\in T$, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur X car (*)
   - (ii) Pour chaque $x\in X$, $\begin{cases} t\mapsto f(x,t) \text{ est } cpm \text{ et intégrable sur } T \text{ car } (**) \\ t\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ est } cpm \text{ sur } T\end{cases}$
   - (iii) Pour tout $(x,t)\in X\times T$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq\varphi(t)$ $(***)$ et $\displaystyle\int_T\varphi(t)\,dt$ converge (****)

D'où la fonction $F\,:\,x \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(x,t)\,dt$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a[$. Ceci est vrai pour tout $[0,a] \subset [0,1[$, donc F est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ et $\forall x \in [0,1[,\ F'(x) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.

(*) la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{2x - 2\cos t}{x^2 - 2x\cos t + 1}$ est continue sur X.

(**) la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est définie d'après la question 1 et continue (donc *cpm*) car ln et cos sont continues. En outre, l'intégrale $\int_T |f(x,t)|\,dt$ n'est même pas impropre : c'est l'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0,\pi]$.

(***) avec $\varphi(t) = \frac{2a+2|\cos t|}{(1-a)^2}$: en effet $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{2x-2\cos t}{x^2-2x\cos t+1}\right|$. Or $|2x-2\cos t| \leq 2|x|+2|\cos t|$. Et $|x^2-2x\cos t+1| \geq (1-x)^2 \geq (1-a)^2$ comme prouvé à la question 1.

($***\,*$) L'intégrale $\int_T \varphi(t)\,dt$ n'est même pas impropre : c'est l'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0,\pi]$.

3. On pose le changement de variable $u = \tan\frac{t}{2}$ qui $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $[0,\pi[$ (ne pas oublier d'ouvrir en π car u n'y est pas défini, ce qui va rendre l'intégrale impropre) : $du = \frac{1}{2}(1+u^2)dt$ et $\cos t = \cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2} = 2\cos^2\frac{t}{2} - 1 = \frac{2}{1+u^2} - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}$. D'après la question 1, l'intégrale $G(x)$ est convergente, d'où :

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 2x\frac{1-u^2}{1+u^2} + 1}\,\frac{2}{1+u^2}\,du = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2(x+1)^2 + (x-1)^2}\,du = \frac{2}{1-x^2}\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{1+x}{1-x}u\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{1-x^2}.$$

4. D'après la question 2, $F'(0) = -2\int_0^\pi \cos t\,dt = 0$ et, si $x \in]0,1[$:
$xF'(x) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{2x^2 - 2x\cos t}{x^2 - 2x\cos t + 1}\,dt = \int_0^\pi \frac{(x^2 - 2x\cos t + 1) + (x^2-1)}{x^2 - 2x\cos t + 1}\,dt = \pi + (x^2-1)\cdot G(x)$, donc $F'(x) = \dfrac{\pi + (x^2-1)\cdot G(x)}{x}$.
D'où $F'(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1[$, or $[0,1[$ est un intervalle, donc la fonction F est constante sur $[0,1[$. Or $F(0) = \int_0^\pi \ln(1)\,dt = 0$. Donc $F(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1[$.

5. F est définie en 1 si, et seulement si, l'intégrale $\int_0^\pi \ln(2 - 2\cos t)\,dt$ converge. Cette intégrale est impropre en 0.
Or $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + t^2\varepsilon(t)$, d'où $2 - 2\cos t = t^2 + t^2\varepsilon(t)$ et $\ln(2-2\cos t) = 2\ln t + \ln(1+\varepsilon(t))$.
L'intégrale $\int_0^\pi \ln t\,dt$, impropre en 0, converge car $\int_a^\pi \ln t\,dt = [t\ln t - t]_a^\pi = \pi\ln\pi - \pi - a\ln a + a \underset{a\to 0^+}{\longrightarrow} \pi\ln\pi - \pi$. Et l'intégrale $\int_0^\pi \ln(1+\varepsilon(t))\,dt$ n'est même pas impropre en 0. Donc la fonction F est définie en 1. (À noter que le théorème suivant va démontrer que F est définie sur $[0,1]$, donc *a fortiori* en 1, ce qui rendra inutile ce qui précède.)

Soient $X = [0,1]$ et $T =]0,\pi]$. (Ne pas oublier d'ouvrir en 0 car l'intégrale est impropre en 0 dans le cas où $x = 1$, or ce cas n'est pas exclu, contrairement à la question 2.)

(i) Pour chaque $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X.
(ii) Pour chaque $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est *cpm* sur T.
(iii) Pour tout $(x,t) \in X \times T$, $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$ (♡) et $\displaystyle\int_T \varphi(t)\,dt$ converge car (♡♡).

D'où la fonction $F\,:\,x \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(x,t)\,dt$ est définie et continue sur $[0,1]$. Et en particulier en 1, d'où : $F(1) = \displaystyle\lim_{x\to 1^-} F(x) = \lim_{x\to 1^-} 0 = 0$. Or $F(1) = \displaystyle\int_0^\pi \ln(2-2\cos t)\,dt = \pi\ln 2 + \int_0^\pi \ln(1-\cos t)\,dt$. Donc $\boxed{\displaystyle\int_0^\pi \ln(1-\cos t)\,dt = -\pi\ln 2.}$

(♡) $\sin^2 t \leq x^2 - 2x\cos t + 1 = (x-\cos t)^2 + \sin^2 t \leq (|x| + |\cos t|)^2 + \sin^2 t \leq (1+1)^2 + 1 \leq 5$, d'où $2\ln\sin t \leq f(x,t) \leq \ln 5$ par croissance du logarithme, donc $|f(x,t)| \leq \max(-2\ln\sin t, \ln 5) \leq \ln 5 - 2\ln\sin t = \varphi(t)$.

(♡♡) L'intégrale $\int_T \varphi(t)\,dt$, impropre en 0 et en π, converge. En effet, l'intégrale $\int_0^{\pi/2}\varphi$ converge car $\ln\sin t = \ln(t + t\varepsilon(t)) = \ln(t) + \ln(1+\varepsilon(t))$. D'une part $\int_0^{\pi/2} \ln t\,dt$ est impropre en 0 et converge, d'autre part $\int_0^{\pi/2} \ln(1+\varepsilon(t))\,dt$ n'est même pas impropre en 0. Et, de même, l'intégrale $\int_{\pi/2}^\pi \varphi$ converge.