Thème n° 3

Intégrales

12 mars 2025

Objectif : Réviser les intégrales impropres ▷ **III** et les intégrales à paramètre ▷ **XIII** mais aussi le théorème de la convergence dominée ▷ **V.11**. Vous pouvez rédiger et me rendre les exercices 8 & 9 dans la case *Thème 3* du Cahier de Prépa.

A • Rédiger :

— une intégrale impropre $\int_{]0,+\infty[}$ des deux côtés converge *ssi* les deux intégrales $\int_{]0,42]}$ et $\int_{[42,+\infty[}$ convergent (et non pas pas *ssi* leur somme converge) ;

— on intègre par parties ▷ **III.19** sans oublier l'hypothèse $\mathcal{C}^1$ des deux fonctions du crochet et, si l'intégrale est impropre, de poser une « barrière » (ou de montrer au préalable que le terme entre crochets a une limite finie) ;

— on change de variable ▷ **III.22** sans oublier l'hypothèse $\mathcal{C}^1$ du CDV et aussi, si l'intégrale est impropre, de poser une « barrière » (ou d'invoquer la stricte monotonie du CDV) ;

B • Se rappeler :

— qu'une intégrale « n'est même pas impropre » si on intègre une fonction continue sur un segment ;

— ce qu'est une intégrale faussement impropre ▷ **III.8 & TD3.6q.1** et qu'une intégrale n'est jamais faussement impropre en $+\infty$ ni en $-\infty$;

— que la divergence grossière d'une intégrale, ça n'existe pas ▷ **III.7**, mais que ça existe quand même si la fonction est uniformément continue ▷ **TD5.7** ;

— la subtile définition de *cpm* sur un intervalle ▷ **III.2 & TD3.3 q.1**.

C • Se soucier des notations quand on utilise les théorèmes ▷ **XIII.4** de continuité et ▷ **XIII.6** de dérivation d'une intégrale à paramètre :

— ne pas confondre la fonction g et le réel $g(x)$, c'est la fonction g qui est continue ou dérivable ;

— ne pas confondre la fonction f et la fonction $t \mapsto f(x,t)$ ou $x \mapsto f(t,x)$;

— de même, ne pas confondre les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ ou $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$;

— écrire $T =]0;42]$ si l'intégrale $\int_0^{42} f(x,t)\,dt$ est impropre en 0 et pas en 42 ;

— si $X =]0,+\infty[$, alors il faut parfois le changer en $X_a = [a,+\infty[$ ou $X_b =]0,b]$ voire $X_{a,b} = [a,b]$ pour réussir à dominer la fonction f ou $\frac{\partial f}{\partial x}$.

D • Retravailler la **fonction Gamma d'Euler** ▷ **XIII.1,3,5,7&9** . On a aussi prouvé l'identité d'Euler ▷ **TD5.6**. Cet exercice était tiré de la partie III du sujet Centrale Supélec Maths 1 PSI 2011. Vous pouvez tenter les parties IV et V qui utilisent des intégrales à paramètre ▷ **m11cs1e.pdf & m11cs1cb.pdf**.

E • Pour établir un équivalent à partir d'une relation fonctionnelle, on utilise tantôt la continuité, tantôt la monotonie ▷ **XIII.5, Colle10.2, Colle19.1** .

F • On dit qu'une fonction f est **intégrable** sur un intervalle I, et on note $f \in L^1(I)$, si $\int_I |f(t)|\,dt$ est convergente, où $|f(t)|$ est la valeur absolue si $f(t) \in \mathbb{R}$ ou le module si $f(t) \in \mathbb{C}$ comme dans l'exercice suivant.

Exercice 8 (La gaussienne & la transformée de Fourier). Soit E l'ensemble des fonctions φ continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ telles que la fonction $t \mapsto t^3 \cdot \varphi(t)$ est bornée.

1. Vérifier que E est un $\mathbb{C}-$sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

2. Montrer que, si $\varphi \in E$, alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{e}^{-i2\pi t x}\,dt$ appelée la *transformée de Fourier* de φ, est définie sur $\mathbb{R}$, qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -i2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)\mathrm{e}^{-i2\pi t x}\,dt.$$

3. Soit $\varphi(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$. Montrer que :
   (a) la fonction φ appartient à E ;
   (b) sa transformée de Fourier g est une solution de l'équation différentielle $g'(x) = -2\pi x g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
   (c) φ est égale à sa transformée de Fourier g (on utilisera la valeur $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$ de l'**intégrale gaussienne** ▷ **TD13.5 & exo 2 du Kdo du 13/12/2024**).

À propos des espaces de Lebesgue : se rappeler que $L^1(I)$ est un *ev* mais pas un *evn* alors que $L^1(I) \cap \mathcal{C}(I)$ est un *evn* ▷ **XI.3.3** (grâce au « théorème de l'intégrale nulle »). De même ▷ **VIII.4&7**, $L^2(I)$ est un *ev* car le produit de deux fonctions de $L^2(I)$ est dans $L^1(I)$. N'est pas un espace préhilbertien $\boxed{\text{B}}\boxed{\text{S}}\boxed{\text{P}}$ mais $\boxed{\cancel{D}}$. Alors que $L^2(I) \cap \mathcal{C}(I)$ en est un (grâce au « théorème de l'intégrale nulle »). Voir aussi $\ell^1 \subset \ell^2 \subset \ell^\infty$ ▷ **Colle16.3**.

G • L'**intégrale de Dirichlet** est convergente ▷ **III.20** mais elle n'est pas absolument convergente ▷ **III.21**. On sait même la calculer ▷ **TD3.6q.8** et c'est une occasion de réviser le lemme de Riemann-Lebesgue ▷ **TD3.6q.5**. Un deuxième calcul ▷ **TD13.13q.8** utilise la transformée de Laplace (l'exercice ▷ **TD13.2** aussi).

Exercice 9. On note E l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tout réel $x > 0$, la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-xt}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout f dans E, on appelle TRANSFORMÉE DE LAPLACE de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout réel $x > 0$ par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt.$$

— Partie I : propriétés de la transformation de Laplace —

(tiré de CCP MATHS 1 MP 2011)

1. Soit f une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   (a) Montrer que f appartient à E.
   (b) Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est prolongeable par continuité en 0.
2. Soit f une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$.
   (a) Montrer que f appartient à E.
   (b) Montrer que $\mathcal{L}(f)(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Soient f dans E et n dans $\mathbb{N}$. On considère la fonction $g_n : t \longmapsto t^n f(t)$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
   Montrer que la fonction g_n est un élément de E.
4. Démontrer que, pour tout $f \in E$, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que : $[\mathcal{L}(f)]' = -\mathcal{L}(g_1)$.
5. Démontrer par récurrence que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]0, +\infty[$ et que $[\mathcal{L}(f)]^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}(g_n)$.
6. Justifier que E est un espace vectoriel et que $\mathcal{L}$ est une application linéaire de E vers $\mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R})$.
7. THÉORÈME DE LA VALEUR FINALE — On suppose dans cette question que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell$, où ℓ est un réel.
   (a) Démontrer que f est bornée.
   (b) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0 et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par : $h_n(x) = e^{-x} f(\frac{x}{a_n})$. Démontrer que : $a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \int_0^{+\infty} h_n(x)\,dx$.
   (c) Montrer que : $x\mathcal{L}(f)(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \ell$.

— Partie II : un calcul de l'intégrale de Dirichlet —

(tiré de CCP MATHS PSI 2017)

Soit la fonction $f \ : \ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$.

1. Montrer que f appartient à E. Étudier $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathcal{L}(f)(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathcal{L}(f)(x)$.
2. Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est une solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle
$$y'' + y = \frac{1}{x} \tag{$*$}$$
3. (a) Justifier que $\alpha(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ et $\beta(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt$ sont définis pour tout $x > 0$.
   (b) Vérifier que les fonctions α et β sont dérivables sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x > 0$:
   $$\alpha'(x)\cos(x) + \beta'(x)\sin(x) = 0 \quad \text{et} \quad \beta'(x)\cos(x) - \alpha'(x)\sin(x) = \frac{1}{x}.$$
   (c) Montrer que la fonction $x \mapsto \alpha(x)\cos(x) + \beta(x)\sin(x)$ est une solution de $(*)$ sur $]0,+\infty[$.
   (d) En déduire que la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\, dt$ est une solution de $(*)$ sur $]0,+\infty[$.
4. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que :
$$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\, dt$$
5. En effectuant une intégration par parties, montrer que, pour tout $x > 0$:
$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\, dt \right| \leq \frac{2}{x}.$$
6. En déduire que, pour tout $x > 0$:
$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\, dt$$
7. Montrer que $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} \right) dt$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+.
8. Montrer que $\int_0^{1} \left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} \right) dt$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+.
9. Déduire des questions précédentes que : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.