## Exercice 1 - Endomorphisme de trace nulle (⋆⋆⋆⋆)

Soit $E$ un espace euclidien et $u$ un endomorphisme symétrique de $E$ de trace nulle.

1. Montrer qu'il existe $x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = 0$.

Soit $(e_i)$ une base orthonormale de $E$ diagonalisant $u$. On a alors :

$$0 = \mathrm{tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), e_i\rangle$$

On pose alors $x = \sum_{i=1}^{n} e_i$, comme la base est orthonormée on a $\langle u(e_i), e_i\rangle = \langle u(e_i), x\rangle$. Puis par linéarité on trouve :

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{tr}(u) &= \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), x\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} u(e_i), x \right\rangle \\ &= \left\langle u\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right), x \right\rangle \\ &= \langle u(x), x\rangle \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. En déduire qu'il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de $u$ a tous ses coefficients diagonaux nuls.

O raisonne par récurrence sur la dimension de $E$. Si $n = 1$ le résultat est évident. Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que la propriété soit vraie pour tout espace euclidien de dimension $n$, et on considère $E$ un espace de dimension $n + 1$.

On considère le vecteur $x$ de la question précédente, en supposant (quitte à normaliser) que $\|x\| = 1$ on pose alors $F = \mathrm{Vect}(x)$ et on considère $(y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une base orthonormée de $F^\perp$. Dans la base $(x, y_1, \dots, y_n)$ la matrice de $u$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & B \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que $B$ est la matrice d'un endomorphisme $v$ de $F^\perp$ qui est symétrique de trace nulle. Ainsi par hypothèse de récurrence il existe une base $(x_i)$ de $F^\perp$ dans laquelle $v$ possède tous ses coefficients diagonaux nuls. La base $(x, x_1, \dots, x_n)$ convient alors.

Par principe de récurrence on en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le résultat est vrai.

3. Montrer que le résultat subsiste encore si l'on ne suppose plus $u$ symétrique.

Soit $M$ la matrice de $u$ dans une base $\mathcal{B}$, on sait qu'il existe un unique couple $(S, A)$ avec $S$ symétrique et $A$ anti-symétrique tel que :

$$M = S + A$$

Or on a $0 = \mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(S + A) = \mathrm{tr}(S) + \mathrm{tr}(A)$, mais $A$ étant anti-symétrique on en déduit que $\mathrm{tr}(A) = 0$ et donc $\mathrm{tr}(S) = 0$.

Dès lors d'après ce qui précède, il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S' =^t QSQ$ soit à diagonale nulle. De plus on remarque que :

$$^tA' =^t \left({}^tQAQ\right) =^t Q^tAQ = -\left({}^tQAQ\right) = -A'$$

Ainsi $A'$ est anti-symétrique, en particulier elle est à diagonale nulle, on en déduit que $M' =^t QMQ$ est une matrice à diagonale nulle représentant $u$.

---

## Exercice 2 - Symétrie semblable à son inverse (⋆⋆)

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, inversible et semblable à son inverse. Montrer que $\operatorname{tr}\left(A^2\right) \geq n$, et qu'il y a égalité si, et seulement si, $A \in O_n(\mathbb{R})$.

Comme $A$ est symétrique, on déduit du théorème spectral que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $A$ est diagonalisable en base orthonormée, ainsi il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D$ une matrice diagonale telle que :

$$p^{-1}AP = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots \lambda_n)$$

Comme la trace est invariante par changement de base, on en déduit que $\operatorname{tr}\left(A^2\right) = \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2$, mais $A$ est inversible donc on a :

$$P^{-1}A^{-1}P = D^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1} \ldots \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

On en déduit donc que $\operatorname{tr}\left(\left(A^{-1}\right)^2\right) = \frac{1}{\lambda_1^2} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n^2}$. Mais finalement $A$ et $A^{-1}$ étant semblable, on trouve $\operatorname{tr}\left(A^2\right) = \operatorname{tr}\left(\left(A^{-1}\right)^2\right)$ On en déduit que :

$$2\operatorname{tr}\left(A^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i^2 + \frac{1}{\lambda_i^2}\right)$$

Or en étudiant rapidement la fonction $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) \geq 2$ avec égalité si, et seulement si, $x = 1$. On en déduit finalement que $\operatorname{tr}\left(A^2\right) \geq n$, avec égalité si, et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!],\ |\lambda_i| = 1$ c'est-à-dire si, et seulement si $A \in O_n(\mathbb{R})$.

---

## Exercice 3 - Projection de $O(E)$ sur $S(E)$ (⋆⋆)

Soit $E$ un espace euclidien de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à caractériser l'ensemble :

$$\mathcal{S} = \left\{s \in \mathcal{L}(E) \ / \ \exists u \in O(E)\,,\ s = \frac{u + u^{-1}}{2}\right\}$$

1. On considère $s \in \mathcal{S}$, ainsi que $u \in O(E)$ tel que $s = \frac{u+u^{-1}}{2}$.

   1.a. Montrer que $s$ est symétrique, puis que $\chi_s$ est scindé sur $\mathbb{R}$ à racine dans $[-1, 1]$.

On va montrer que $s = s^*$, comme $u \in O(E)$ on en déduit que $u^* = u^{-1}$ mais aussi $\left(u^{-1}\right)^* = u$. Dès lors pour $(x, y) \in E^2$ on a :

$$
\begin{aligned}
\langle s(x)\,|y\rangle &= \left\langle \frac{u(x)+u^{-1}(x)}{2}|y\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left(\langle u(x)\,|y\rangle + \left\langle u^{-1}(x)\,|y\right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\langle u(x)\,|y\rangle + \left\langle u^{-1}(x)\,|y\right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left\langle x|u^{-1}(y)\right\rangle + \langle x|u(y)\rangle\right) \\
&= \left\langle x|\frac{u^{-1}(y)+u^{-1}(y)}{2}\right\rangle \\
&= \langle x|s(y)\rangle
\end{aligned}
$$

Ceci démontre alors que $s$ est symétrique. Dès lors on peut appliquer le théorème spectral afin d'en déduire que $s$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, en particulier son polynôme caractéristique $\chi_s$ est scindé.

Enfin considérons $\lambda \in \mathrm{Sp}(s)$, et $x \in E_\lambda$, où $E_\lambda$ désigne l'espace propre de $s$ associé à $\lambda$, on a alors :

$$
\begin{aligned}
\|s(x)\| &= \left\|\frac{u(x)+u^{-1}(x)}{2}\right\| \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\|u(x)\| + \left\|u^{-1}(x)\right\|\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\|x\| + \|x\|\right) \\
&\leq \|x\|
\end{aligned}
$$

Mais aussi :

$$
\|s(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|
$$

Dès lors on en déduit que $|\lambda| \leq 1$ d'où le résultat.

1.b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ montrer que $E_\lambda = \ker(s - \lambda id)$ est stable par $u$.

Pour montrer la stabilité on va simplement démontrer que $s$ et $u$ commute car le résultat en découlera par l'intermédiaire d'un théorème du cours.

En effet on a :

$$
\begin{aligned}
s \circ u &= \left(\frac{u+u^{-1}}{2}\right) \circ u \\
&= \frac{u \circ u + u^{-1} \circ u}{2} \\
&= \frac{u \circ u + u \circ u^{-1}}{2} \\
&= u \circ \left(\frac{u+u^{-1}}{2}\right) \\
&= u \circ s
\end{aligned}
$$

D'où le résultat.

1.c. À présent on suppose $\lambda \in \left]-1,1\right[$ montrer que l'endomorphisme $u|_{E_\lambda}$ n'as pas de vecteur propre. Que peut-on en déduire pour $E_\lambda$ puis pour $\chi_s$ ?

On fait une démonstration par l'absurde en supposant qu'il existe $x \in E_\lambda$ un vecteur propre de $u$. Comme $u \in O(E)$ ses valeurs propres ne peuvent être que $\pm 1$ soit donc $\varepsilon = \pm 1$ la valeur propre associé à $x$, on remarque alors que $u(\varepsilon x) = \varepsilon u(x) = \varepsilon^2 x = x$, ainsi $u^{-1}(x) = \varepsilon x$, on a alors d'une part :

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{u(x) + u^{-1}(x)}{2} \\ &= \frac{\varepsilon x + \varepsilon x}{2} \\ &= \varepsilon x \end{aligned}$$

Mais d'autre part $x \in E_\lambda$, et donc $s(x) = \lambda x$, d'où on tire $\lambda = \varepsilon$ ce qui est absurde car $\lambda \in ]-1,1[$. Finalement $u|_{E_\lambda}$ ne possède pas de vecteur propre.
Par contraposée on en déduit que $\dim E_\lambda$ est paire, en effet si $\dim E_\lambda$ est impaire alors $u|_{E\lambda}$ devrait admettre une valeur propre réelle et donc un vecteur propre. Comme $s$ est diagonalisable la dimension de $E_\lambda$ est égale à la multiplicité de $\lambda$ dans $\chi_s$. Autrement dit $m_\lambda(\chi_s)$ est paire.

2. Réciproquement on considère $s \in \mathcal{L}(E)$ symétrique, dont le spectre est contenu dans $[-1,1]$. De plus on suppose que pour tout $\lambda \in ]-1,1[$ la propriété obtenu à la question précédente sur $\chi_s$ est vérifiée, montrer qu'alors $s \in \mathcal{S}$.

---

## Exercice 4 - Une matrice spéciale (⋆⋆⋆)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $k \geq 2,\ A^k =^t A$.

1. Montrer que ${}^tAA$ est un projecteur orthogonal.

C'est drôle puisque pour une fois on ne montre pas qu'il s'agit d'une projection en montrant que $p \circ p = p$ ! Comme ${}^tAA$ est symétrique réelle on sait, d'après le théorème spectral, qu'elle est diagonalisable en base orthonormée, en particulier il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et des $\lambda_i$ pour $i \in [\![1,n]\!]$ tels que :

$${}^tAA = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} {}^tP$$

Pour montrer que ${}^tAA$ est un projecteur orthogonal, il ne reste alors plus qu'à montrer que pour tout $i,\ \lambda_i$ est 0 ou 1. On s'intéresse donc aux valeurs propres de ${}^tAA$ et pour cela on va chercher un polynôme annulateur, c'est alors qu'on remarque que comme ${}^tA = A^k$ on sait que $A$ et sa transposée commute. Il vient alors :

$$\left({}^tAA\right)^k = \left({}^tA\right)^k A^k =^t \left(A^k\right)^t A =^t \left({}^tA\right)^t A =^t AA$$

En particulier le polynôme $X^k - X$ est annulateur de ${}^tAA$. On exclut de ses racines celles qui sont complexes car ${}^tAA$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, on est donc assurer que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i \in \{-1,0,1\}$. Enfin, on montre que ${}^tAA$ n'est pas seulement symétrique, mais symétrique positive, ce qui assure que ses valeurs propres le sont aussi. En effet pour $X$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ on a :

$${}^tX{}^tAAX =^t (AX)\, AX = \|AX\|^2$$

2. Montrer que $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Maintenant que l'on sait que ${}^tAA$ est un projecteur on peux affirmer que $\left({}^tAA\right)^2 =^t AA$. Puis en remplacant ${}^tA$ par $A^k$ il vient :

$$\left(A^kA\right)^2 = A^kA \Longleftrightarrow A^{2k+2} - A^{k+1} = 0$$

Ainsi le polynôme $X^{k+1}\left(X^{k+1} - 1\right)$ est annulateur, d'après le lemme des noyaux sur $\mathbb{C}$ on obtient :

$$\mathbb{C}^n = \ker\left(A^{k+1}\right) \oplus \left(\bigoplus_{\mu \in \mathbb{U}_{k+1}} \ker(A - \mu I_n)\right)$$

Le seul terme dans cette somme qui n'est pas immédiatement un espace propre est $\ker\left(A^{k+1}\right)$ néanmoins $A^{k+1} =^t AA$ et c'est un exercice classique de montrer que $\ker(A) = \ker({}^tAA)$ (une inclusion est trivial, pour la seconde on renvoie à l'expression de la fin de la question précédente). Finalement $A$ est bien diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

---

## Exercice 5 - Symétrique et orthogonal ($\star\star$)

Déterminer tous les endomorphismes symétriques et orthogonaux d'un espace euclidien.

On procède par analyse synthèse. Soit $u$ un tel endomorphisme, et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ une valeur propre. Soit $x \in E_\lambda$, comme $u$ est orthogonale $\|u(x)\| = \|x\|$ et de plus par définition on a $\|u(x)\| = |\lambda| \|x\|$.

On en déduit que $\lambda = \pm 1$. De plus comme $u$ est symétrique elle est diagonalisable, dès lors ses espaces propres sont supplémentaires. D'où :

$$\ker(u - Id) \overset{\perp}{\oplus} \ker(u + Id) = E$$

Ainsi $u$ est une symétrie orthogonale. Pour la synthèse on vérifie de façon immédiate qu'une symétrie orthogonale est un endomorphisme symétrique et orthogonale.

---

## Exercice 6 - Somme d'itéré ($\star\star\star$)

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien et soit $u \in \mathcal{O}(E)$, on pose $v = u - Id$.

1. Montrer que $\ker(v)^\perp = \mathrm{Im}(v)$.

On va montrer dans un premier temps que $\ker(v) = \mathrm{Im}(v)^\perp$, pour cela on considère $x \in \ker(v)$, qui vérifie donc $u(x) = x$, et $y \in \mathrm{Im}(v)$ qui s'écrit donc $y = v(z) = u(z) - z$ pour $z \in E$. On a dès lors :

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= \langle x, u(z) - z\rangle \\
&= (\langle x, u(z)\rangle - \langle x, z\rangle \\
&= \langle u(x), u(z)\rangle - \langle x, z\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

La dernière égalité provenant du fait que $u$ préserve le produit scalaire. Ainsi $\ker(v) \subset \mathrm{Im}(v)$. Enfin par le théorème du rang on a :

$$\dim \mathrm{Im}(v) = \dim E - \dim \ker(v)$$

Puis par propriété de l'orthogonal :

$$\dim \mathrm{Im}(v)^\perp = \dim E - \dim \mathrm{Im}(v) = \dim \ker(v)$$

Ainsi de l'égalité des dimensions on en déduit l'égalité $\ker(v) = \mathrm{Im}(v)^\perp$, en passant à l'orthogonal on obtient alors le résultat demandé.

2. Soit

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k$$

Démontrer que pour tout $x \in E$ la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le projeté orthogonal de $x$ sur $\ker(v)$.

On sait que l'on a $E = \ker(v) \oplus \ker(v)^{\perp}$, soit donc $x = a + b$ une telle décomposition. Comme $a \in \ker(v)$, $u(a) = a$ et on peut vérifier par récurrence immédiate que $u_n(a) = a$. D'autre part calculons $u_n(b)$, en remarquant que d'après la question précédente, $b \in \mathrm{Im}(v)$ et donc $b = v(c) = u(c) - c$ on a alors :

$$\begin{aligned} u_n(b) &= u_n(v(c)) \\ &= u_n(u(c) - c) \\ &= u_n(u(c)) - u_n(c) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^{k+1}(c) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(c) \\ &= \frac{1}{n}\Big(u^n(c) - c\Big) \end{aligned}$$

D'où comme $u$ est orthogonale :

$$\begin{aligned} \|u_n(b)\| &\leq \frac{1}{n}\Big(\ \|u^n(c)\| + \|c\|\ \Big) \\ &= \frac{2 \times \|c\|}{n} \end{aligned}$$

Ce qui montre bien que $u_n(b)$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$. Ainsi par somme de limite on en déduit le résultat.

---

## Exercice 7 - Si on enlève la linéarité... (⋆⋆⋆)

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien et soit $f : E \to E$ une application telle que :

$$\forall (x, y),\ \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

1. Démontrer que l'image d'une base orthonormale de $E$ par $f$ est une base orthonormale.

Soit $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base orthonormale de $E$. Alors on a pour $i$ et $j$ de $[\![1, n]\!]$ on a :

$$\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle$$

Ce qui prouve bien que $(f(e_i))$ est une base orthonormée.

2. En déduire que $f$ est linéaire.

Soit $x \in E$ on a :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle\, e_i$$

Ainsi d'après les propriétés de $f$ on en déduit :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(x), f(e_i)\rangle\, f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle\, f(e_i)$$

Soit à présent $y \in E$ on a d'une part :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle\, f(e_i) \qquad f(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle y, e_i\rangle\, f(e_i)$$

D'où pour $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$f(x) + \lambda \times f(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle f(e_i) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \langle y, e_i \rangle f(e_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \Big( \langle x, e_i \rangle + \lambda \langle y, e_i \rangle \Big) f(e_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \langle x + \lambda y, e_i \rangle f(e_i)$$

Mais aussi :

$$f(x + \lambda y) = \sum_{i=1}^{n} \langle x + \lambda y, e_i \rangle f(e_i)$$

Ce qui prouve que $f$ est bien linéaire.

---

## Exercice 8 - Dénombrement (★★)

Quel est le cardinal de $O_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ ? Et celui de $SO_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ ?

Soit $M = (a_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$, comme elle est orthogonale, on en déduit que ces colonnes sont normées, et donc pour $j \in [\![1, n]\!]$ :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$$

Mais $M$ est aussi à coefficient entier, ainsi on en déduit que tous les coefficients sont nuls, à l'exception d'un par colonne qui vaut $\pm 1$. De plus les colonnes de $M$ étant orthogonales on en déduit que deux colonnes ne peuvent avoir "leur" $\pm 1$ sur la même ligne. Finalement on peut interpréter $M$ comme une matrice de permutation, il y a donc $n!$ matrice de ce types, dans laquelle on s'autorise à changer les 1 en $-1$. Ainsi pour chaque coefficient il y a 2 possibilités, on obtient alors :

$$|O_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})| = 2^n n!$$

Pour la deuxième question il suffit de remarquer qu'en imposant $M \in SO_n(\mathbb{R})$ on impose en plus une parité sur le nombre de $-1$, autrement dit tout ce déroule comme précédemment, à l'exception du dernier coefficient pour lequel le choix 1 ou $-1$ est imposé, ainsi :

$$|SO_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})| = 2^{n-1} n!$$

Une autre façon de voir les choses c'est de considérer l'application det : $O_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}) \to \{-1, 1\}$ et de s'apercevoir qu'il s'agit d'un morphisme de groupe (il faut quand même s'assurer que $M^{-1}$ est bien à coefficient entier mais avec l'expression par la comatrice cela ne pose pas de difficultés). Dès lors on s'aperçoit que le noyau de ce morphisme correspond à $SO_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$, comme l'image est de cardinal 2 on en déduit que celui de $SO_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ est la moitié de $O_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Dans ce dernier argument on peut se passer de parler de quotient en établissant une relation d'équivalence qui conduit à l'égalité voulue sur les cardinaux.

---