

CCINP 2023 ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC
MATHÉMATIQUES
Un corrigé

EXERCICE 1 Endomorphisme cyclique

Partie I - Étude d'un premier exemple

Q1. Ici $\dim(E) = 2$

Soit $v = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$. $f(v) = (4, 1)$ qui est libre avec v car on a deux vecteurs non colinéaires.

$(v, f(v))$ famille libre à $2 = \dim(E)$ éléments donc base de E .

Donc f est un endomorphisme cyclique de $\mathbb{R}^2$.

Q2. En notant $\mathcal{B}$ la base canonique. $M = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\chi_M(X) = \chi_f(X) = X^2 - 5X + 6 = (X - 3)(X - 2)$ Donc $sp(f) = \{2, 3\}$.

En utilisant M on trouve :

$E_2(f) = \text{Ker}(f - 2\text{id}_E) = \text{vect}((1, 1))$

$E_3(f) = \text{Ker}(f - 3\text{id}_E) = \text{vect}((2, 1))$

On peut remarquer que f est diagonalisable, même si cela n'est pas demandé.

Q3. En prenant n'importe quel w vecteur propre de f , $f(w)$ est alors colinéaire à w et donc $(w, f(w))$ liée.

Concrètement : Soit $w = (1, 1)$, $f(w) = 2w$, $(w, 2w)$ liée et donc pas base de E .

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

Q4. Il suffit de calculer M^2 et de vérifier que l'on a bien l'égalité $M^2 = M + 2I_3$ qui rend compte matriciellement de la relation $g^2 = g + 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

Q5. Je propose ici plusieurs possibilités :

a) M est symétrique réelle donc le Théorème spectral assure qu'elle est diagonalisable, mais celui ci est peu intéressant car ne donne pas le spectre.

b) Grâce à Q4. $P = X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$ est annulateur de M scindé à racines simples et donc par théorème M diagonalisable. De plus $sp(M) \subset \{-1, 2\}$ et forcément égal sinon M serait égale à $-I_3$ ou $2I_3$.

c) Enfin par le classique $\chi_M(X)$ qui se calcule bien ici en faisant $C_1 + C_2 \rightarrow C_1$, on peut sortir alors $(X + 1)$ en facteur, puis $L_2 - L_1 \rightarrow L_2$ qui donne $\chi_M(X) = (X + 1)^2(X - 2)$.

Par les ordres de multiplicité $E_2(M)$ est forcément de dimension 1, et enfin $E_1(M)$ est le plan d'équation $x - y + z = 0$ de dimension 2 on a bien la somme des dimensions des sev propres qui vaut 3.

Q6. Prenons $v \in \mathbb{R}^3$. Par Q4. on a donc $g^2(v) = g(v) + 2v$ et donc $(v, g(v), g^2(v))$ n'est pas libre.

L'endomorphisme g n'est donc pas cyclique.

Partie III - Étude d'un troisième exemple

ATTENTION il y a un petit conflit de notations : Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Ici $E = \mathbb{R}_n[X]$ et donc $\dim(E) = n + 1$ et pas n .

Q7. Montrons que Δ est linéaire :

$$\text{Soit } P, Q \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \Delta(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X + 1) - (\lambda P + \mu Q)(X) = \\ \lambda P(X + 1) + \mu Q(X + 1) - \lambda P(X) - \mu Q(X) = \lambda \Delta(P) + \mu \Delta(Q)$$

Ensuite soit $P \in E$ par principe des degrés,

$$\deg(P(X + 1)) = \deg(P(X)) \text{ et } \deg(P(X + 1) - P(X)) \leq \max(\deg(P(X + 1)), \deg(P(X))) \text{ ainsi } \Delta(P) \in E.$$

Conclusion Δ est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Q8. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Si $k = 0$, $\Delta(1) = 0$.

Si $k \geq 1$ en utilisant le binôme de Newton :

$$\Delta(X^k) = (X + 1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i \text{ On constate pour la suite que c'est un polynôme de degré } k - 1 \text{ et son coefficient dominant vaut } k.$$

Q9. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme non constant, notons $d \geq 1$ son degré. $P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_d X^d$.

Par linéarité de Δ , $\Delta(P) = \alpha_0 \Delta(1) + \alpha_1 \Delta(X) + \cdots + \alpha_d \Delta(X^d)$

Et grâce à la Q8, $\Delta(P)$ est bien un polynôme de degré $d - 1$, et son coefficient dominant vaut $d\alpha_d$.

Q10. Prenons le vecteur X^n .

Par Q9, la famille $(X^n, \Delta(X^n), \Delta^2(X^n), \dots, \Delta^n(X^n))$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés de n à 0 c'est une famille libre de $n + 1$ vecteurs de E et $\dim(E) = n + 1$ c'est donc une base de E .

Ainsi l'endomorphisme Δ est cyclique.

Partie IV - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Q11. Montrons par récurrence sur p , que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p v_n$$

Amorce $p = 1$. Nous avons $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ et h linéaire, et pour tout k , $h(v_k) = \lambda_k v_k$, ainsi par linéarité de h on a bien $h(v) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n v_n$

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé, supposons l'égalité :

$$h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p v_n$$

Il suffit de nouveau d'appliquer h d'invoquer sa linéarité et pour les mêmes principes que pour l'amorce on a bien :

$$h^{p+1}(v) = h(h^p(v)) = \alpha_1 \lambda_1^{p+1} v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^{p+1} v_n$$

Conclusion : Par principe de récurrence l'égalité est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

Q12. Le déterminant de la famille $\mathcal{F} = (v, h(v), \dots, h^{n-1}(v))$ dans la base $\mathcal{B}$ est le déterminant de la matrice des coordonnées de cette famille dans $\mathcal{B}$ leurs coordonnées étant données par Q11.

$$\text{Donc } \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \lambda_1 & \cdots & \alpha_1 \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n \lambda_n & \cdots & \alpha_n \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Il suffit alors de sortir $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ par n linéarité, et ainsi de tomber sur le déterminant de Vandermonde $V_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$

Conclusion

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Q13. Si h admet n valeurs propres distinctes.

Je prends $v = v_1 + \dots + v_n$, soit tous les $\alpha_k = 1$ et grâce à Q12, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$

$(v, h(v), \dots, h^{n-1}(v))$ est alors une base de E et h est cyclique.

Si h est cyclique, il existe un vecteur v tel que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$

Et toujours par Q12 ceci garantit que toutes les valeurs propres sont distinctes.

EXERCICE 2 La fonction dilogarithme

Partie I - Existence et premières propriétés de la fonction dilogarithme

Q14. Soit $t > 0$, $e^t > 1$ et donc pour tout $x \leq 1$, $-x \geq -1$ et donc $e^t - x > 0$

Ainsi f est bien définie sur $]0, +\infty[\times]-\infty, 1]$ comme rapport de deux fonctions à dénominateur non nul.

Q15. D'abord $t \mapsto f(t, 1)$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

"en $+\infty$ ", $f(t, 1) = o(\frac{1}{t^2})$ par croissance comparée.

"en $0+$ ", grâce au $DL_1(0)$ de $e^t = 1 + t + o(t)$, on a $f(t, 1) \sim 1$ et f peut donc se prolonger par continuité en 0.

Ainsi $t \mapsto f(t, 1)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Q16. Soit $x \in]-\infty, 1]$:

$x \leq 1$, donc $-x \geq -1$, donc $e^t - x \geq e^t - 1 > 0$, il suffit d'inverser puis de multiplier par $t > 0$ pour obtenir, $0 < f(t, x) \leq f(t, 1)$

Et comme $t \mapsto f(t, 1)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ par comparaison de fonctions positives $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Q17. Appliquons le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre à $x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t, x)dt$

Vérifions ses hypothèses :

i) Pour tout $x \in]-\infty, 1]$, $t \mapsto f(t, x)$ est continue (donc cpm) sur $]0, +\infty[$

ii) Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto f(t, x)$ est continue sur $] -\infty, 1]$

iii) Pour tout $x \in]-\infty, 1]$, pour tout $t \in]0, +\infty[$, $0 < f(t, x) \leq f(t, 1) = \phi(t)$

Et ϕ est continue positive intégrable par Q15.

Ainsi $x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t, x)dt$ est continue sur $] -\infty, 1]$

Puis L est continue sur $] -\infty, 1]$ par simple produit de fonctions continues.

Partie II - Développement en série entière

Q18. Ici x et n sont fixés. On peut sortir le x^n de l'intégrale par simple linéarité et n'étudier que $\int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}dt$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que l'intégrale $\int_0^{+\infty} s_n(t)dt$ converge.

D'abord $t \mapsto te^{-(n+1)t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ (elle est même continue sur tout $\mathbb{R}$), il n'y a donc pas de problème en $t = 0$.

"En $+\infty$ " comme $n + 1 > 0$, par croissance comparée, $te^{-(n+1)t} = o(\frac{1}{t^2})$.

Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable "en $+\infty$ ", on a donc bien par comparaison de fonctions positives que l'intégrale $\int_0^{+\infty} s_n(t)dt$ converge puisque x^n est un constant de t .

Ensuite utilisons la proposition sur les IPP généralisées.

Posons $u(t) = t$, $u'(t) = +1$, $v'(t) = e^{-(n+1)t}$, $v(t) = -\frac{1}{n+1}e^{-(n+1)t}$

Étudions le crochet : En 0, l'intégrale n'est pas impropre : $u(0)v(0) = 0$

En $+\infty$, $u(t)v(t) \rightarrow 0$, toujours croissances comparées.

Ainsi on peut conclure à l'égalité des deux intégrales convergentes :

$$\int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n+1} e^{-(n+1)t} dt = \frac{1}{(n+1)^2}. \text{ La dernière égalité par simple primitivation.}$$

Toujours en multipliant par la constante x^n , on a bien :

$$\int_0^{+\infty} s_n(t) dt = \frac{x^n}{(n+1)^2}.$$

Q19. On travaille toujours en variable t .

Soit $t > 0$ (je n'ose dire fixé). Soit $x \in [-1, 1]$.

$te^{-(n+1)t}x^n$ est géométrique de raison $q = e^{-t}x$ et de premier terme te^{-t} . Comme $|q| \in [0, 1[$ la série

$$\sum_{n \geq 0} e^{-(n+1)t}x^n \text{ converge vers } \frac{te^{-t}}{1 - xe^{-t}} = f(t, x)$$

Conclusion :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = f(t, x)$$

Q20. Soit $x \in [-1, 1]$, $|\frac{x^n}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente.

Ainsi $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ converge absolument et donc par théorème de la convergence absolue elle converge.

Appliquons ensuite le théorème d'interversion à la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} x s_n(t)$ et intégrale généralisée en variable t , x est ici un "fixé".

Vérifions ses hypothèses :

i) Par Q18. $\forall n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto x s_n(t)$ intégrable sur $]0, +\infty[$.

ii) Par Q19. $t \mapsto \sum x s_n(t)$ converge simplement vers $t \mapsto x f(t, x)$.

iii) D'abord par le fait que x^n est un fixé de l'intégrale en t , toujours par Q18.

$$\int_0^{+\infty} |x s_n(t)| dt = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

Et par le début de Q20. $\sum_{n \geq 0} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2}$ converge (simple changement d'indice).

nous avons donc bien $\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} x s_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = L(x)$

Q21. Soit $x \in [-1, 1]$, d'abord $-x \in [-1, 1]$, on somme alors deux séries convergentes,

$$L(x) + L(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n(1+(-1)^n)}{n^2}$$

Si n est impair $1 + (-1)^n = 0$ Si $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$ est pair, $1 + (-1)^n = 2$.

$$\text{Ainsi } L(x) + L(-x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p} 2}{(2p)^2} = \frac{1}{2} L(x^2).$$

Q22. $L(1) = \frac{\pi^2}{6}$ par le résultat donné en tout début d'énoncé.

$$\text{Donc par Q21. appliquée en } x = 1, L(-1) = -\frac{1}{2}L(1) = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Partie III - Une autre propriété

Q23. Ici l'aspect ouvert $] -1, 1[$ est essentiel.

Tout d'abord je remarque que R le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{n^2}$ vaut 1. Un argument élégant, multiplier par n ne modifie pas le rayon de CV ce qui ramène à l'usuel $R = 1$ de la série géométrique.

On sait donc par le théorème de dérivation des séries entières que sa somme est C^∞ sur l'ouvert de convergence $] -1, 1[$.

Ensuite d'après la Q20. L est une fonction qui coïncide avec cette somme sur $[-1, 1]$, donc sur l'ouvert $] - 1, 1[$.

Ainsi, je me répète, par théorème de dérivation des séries entières L est dérivable sur l'ouvert de convergence et on peut dériver terme à terme (elle y est même C^∞).

On a donc sur $] - 1, 1[$, $L'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$.

Il suffit alors de bien distinguer $x = 0$ qui donne $L'(1) = 1$, et pour $x \neq 0$ en sortant $\frac{1}{x}$ de la somme on a le DSE usuel de $-\ln(1-x)$.

Ainsi L est dérivable sur $] - 1, 1[$ et on a :

$$\forall x \in] - 1, 1[, \quad L'(x) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Q24. Sur $]0, 1[$, h est dérivable par somme, produit et composées de fonctions dérivables.

Il suffit alors de dériver h et d'utiliser l'expression de L' de Q23. pour obtenir $h'(x) = 0$.

$]0, 1[$ est un intervalle, ainsi la fonction h est constante sur $]0, 1[$.

Q25. Notons C la valeur constante de h sur $]0, 1[$.

Passons à la limite dans l'expression définissant h , quand $x \rightarrow 0+$.

Nous utilisons ici que L est continue sur $[0, 1]$ résultat obtenu en Q17.

Donc quand $x \rightarrow 0+$, $L(x) \rightarrow L(0)$, $L(1-x) \rightarrow L(1)$, et $\ln(x) \ln(1-x) \sim -x \ln(x) \rightarrow 0$.

Donc $h(x) \rightarrow L(1)$. Et par unicité de la limite $C = L(1)$.

On a bien que $h(x) = L(1)$ pour tout $x \in]0, 1[$.

Enfin prenons pour h la valeur $x = \frac{1}{2} \in]0, 1[$.

On a donc $L(1) = 2L(\frac{1}{2}) + \ln(2)^2$ qui donne $L(\frac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln(2)^2}{2}$.

Et enfin par définition intégrale de L , $L(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{2e^t-1} dt$.

Conclusion $\int_0^{+\infty} \frac{t}{2e^t-1} dt = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln(2)^2}{2}$.

EXERCICE 3 Un jeu de société

Partie I - Préliminaires

I.1 - Modélisation

Q26. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. X_n représente l'avancement relatif à l'étape n .

S_n représente l'avancement absolu (i.e la position) à l'étape n .

Q27. T représente "le temps d'attente" pour dépasser A , c'est à dire le premier (le plus petit) n tel que $S_n \geq A$.

I.2 - Calcul de la somme d'une série entière

Q28. Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que que $f^{(p)}$ existe sur $] - 1, 1[$ et que

$$\forall x \in] - 1, 1[, \quad f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$$

Amorce $p = 0$. C'est la définition de f .

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$ quelconque fixé, supposons la propriété vraie au rang p .

On a alors $f^{(p)}$ qui est dérivable sur $] - 1, 1[$ comme fonction rationnelle à dénominateur non nul,

$$\text{ainsi } f^{(p+1)}(x) = (f^{(p)})'(x) = \frac{d}{dx} p!(1-x)^{-(p+1)} = p!(-1)(-(p+1))(1-x)^{-(p+2)} = \frac{(p+1)!}{(1-x)^{p+2}}$$

Conclusion : Par principe de récurrence le résultat est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Q29. Soit $p \in \mathbb{N}$ "fixé". Posons pour tout $n \geq p$, $a_n = \binom{n}{p} > 0$.

Les coefficients étant > 0 nous pouvons appliquer la règle de D'Alembert sans la variable x pour déterminer R le rayon de convergence : Par expression en factorielles des combinaisons et simplification : $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n+1-p} \rightarrow +1$ quand $n \rightarrow +\infty$. Ainsi $R = \frac{1}{1} = +1$.

Conclusion : le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq p} \binom{n}{p} x^n$ est égal à 1.

Q30. D'abord par DSE usuel, f est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et $\forall x \in] -1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Ensuite soit $p \in \mathbb{N}$ par théorème de dérivation des séries entières on peut dériver f p fois terme à terme sur l'ouvert de convergence ce qui donne $f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} p! \binom{n}{p} x^{n-p}$.

Enfin nous avons l'expression de $f^{(p)}$ obtenue à Q28. il suffit alors de multiplier par x^p et diviser par $p!$ pour obtenir :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}.$$

Partie II - Étude d'un premier cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $M = 2$.

II.1 - Loi des variables aléatoires S_n et T

Q31. Remarquons que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $X_k \sim \mathcal{B}(1/2)$, S_n apparait donc comme somme de n v.a.d indépendantes suivants toutes une $\mathcal{B}(1/2)$.

Ainsi, si $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit une loi binomiale de paramètres n et $1/2$.

Q32. En prenant la définition de T de l'énoncé :

Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas :

Si le procédé s'arrête : $T(\omega) \in \mathbb{N}^*$ et $T(\omega) \geq A$ car "au mieux" on a avancé de $+1$ à chaque fois.

Si le procédé ne s'arrête pas, (cela peut arriver par exemple lorsque ou tous les X_k renvoient 0) alors $T(\omega) = 0$.

Ainsi les valeurs prises par la variable aléatoire T sont $\{0\} \cup [A, +\infty[$.

Q33. Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq A$.

Vu qu'ici on ne peut qu'avancer d'un coup ou ne pas bouger à chaque étape,

$$(T = k) = (S_{k-1} = A - 1) \cup (X_k = 1).$$

Ensuite les événements $(S_{k-1} = A - 1)$ et $(X_k = 1)$ sont indépendants (par le lemme des coalitions), donc

$P(T = k) = P(S_{k-1} = A - 1)P(X_k = 1)$ nous connaissons ces lois usuelles , nous avons bien :

$$P(T = k) = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k}$$

Q34. Par Q30. $P(T = 0) = 1 - P(T > 0)$. Et $P(T > 0) = \sum_{k=A}^{+\infty} \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^{k-1}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=A-1}^{+\infty} \binom{k}{A-1} \frac{1}{2^k}$

Nous savons évaluer cette somme grâce à Q30 appliqué à $p = A - 1$ et $x = 1/2$.

$$\sum_{k=A-1}^{+\infty} \binom{k}{A-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1/2^{A-1}}{1/2^A} \text{ au final } P(T > 0) = 1 \text{ et } P(T = 0) = 0.$$

II.2 - Espérance de la variable aléatoire T

Q35. Exploitions ici les résultats obtenus.

La série entière définissant G_T correspond à celle de Q29 mais avec un facteur $\frac{1}{2^k}$. Cela assure (sans détails ...) que le rayon de convergence $R_T = 2$, ensuite il suffit d'utiliser la formule de Q30. pour $p = A - 1$ en $\frac{x}{2}$ ($x \in] - 2, 2[$ donc $x/2 \in] - 1, 1[$) qui donne bien

$$\forall x \in] - R_T, R_T[, \quad G_T(x) = \left(\frac{x}{2-x} \right)^A.$$

Q36. Le nombre moyen de tours de jeu pour terminer notre partie est donné par $E(T)$.

Comme $R_T = 2 > 1$, G_T est dérivable en 1, et donc $E(T) = G'_T(1)$.

$$G'_T(x) = A \left(\frac{x}{2-x} \right)^{A-1} \frac{2}{(2-x)^2}, \text{ ainsi } E(T) = 2A$$

Partie III - Étude d'un second cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $A \leq M$.

III. 1 - Calcul de la probabilité $P(S_n \leq k)$

Q37. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquons la formule des probabilités totales pour le système complet d'évènements $((X_{n+1} = 0), \dots, (X_{n+1} = M-1))$:

$$\text{Soit } k \leq A-1, P(S_{n+1} \leq k) = \sum_{\ell=0}^{M-1} P(S_{n+1} \leq k, X_{n+1} = \ell)$$

Il suffit alors de constater que :

Il est impossible que $\ell > k$

et que pour $\ell \leq k$, $(S_{n+1} \leq k, X_{n+1} = \ell) = (S_n \leq k - \ell, X_{n+1} = \ell)$ qui nous ramène à deux évènements indépendants (lemme des coalitions),

$$\text{enfin } P(X_{n+1} = \ell) = \frac{1}{M},$$

$$\text{donnant ainsi } P(S_{n+1} \leq k, X_{n+1} = \ell) = P((S_n \leq k - \ell, X_{n+1} = \ell) = P(S_n \leq k - \ell) \frac{1}{M}$$

Le résultat est ainsi démontré.

Remarque : J'avais fait en première intention avec la formule des probabilités composées. J'interprète alors un conditionnement ce qui est évitable ici.

$$\text{Soit } k \leq A-1, P(S_{n+1} \leq k) = \sum_{\ell=0}^k P(S_{n+1} \leq k | X_{n+1} = \ell) P(X_{n+1} = \ell)$$

$$P(S_{n+1} \leq k | X_{n+1} = \ell) = P(S_n \leq k - \ell) \text{ et } P(X_{n+1} = M) = \frac{1}{M}$$

On a bien

$$\forall k \in \llbracket 0, A-1 \rrbracket, \quad P(S_{n+1} \leq k) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^k P(S_n \leq k - \ell).$$

Q38. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, A-1 \rrbracket, \quad P(S_n \leq k) = \frac{1}{M^n} \binom{n+k}{n}$$

Amorce : $n = 1$ $S_1 = X_1$ et X_1 suit une loi uniforme sur $\llbracket 0, M-1 \rrbracket$.

$$\text{Donc } P(X_1 \leq k) = \frac{k+1}{M}. \text{ Et } \binom{k+1}{1} = k+1.$$

On a bien l'égalité pour $n = 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé. On suppose l'égalité vraie au rang n .

Pour calculer $P(S_{n+1} \leq k)$ il suffit d'utiliser H.R dans le résultat de Q37, puis d'appliquer la formule proposée par l'énoncé en début de III.1.

III.2 - Espérance de la variable aléatoire T

Q39. Les événements $(T > n)$ et $(S_n < A)$ **ne sont pas égaux**.

On a ici $(T > n) \subset (S_n < A)$ ou mieux $(T > n) \cup (T = 0) = (S_n < A)$

Quand on passe alors au calcul de la somme de la série on voit bien le souci de $P(T = 0)$.

Voici (je pense) une solution :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(S_n < A) = (S_n \leq A - 1)$.

Je calcule d'abord la somme de la série des $P(S_n \leq A - 1)$ qui converge :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n \leq A - 1)$$

Or par Q38. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n \leq A - 1) = \frac{1}{M^n} \binom{n+A-1}{n}$.

Cette formule reste vraie pour $n = 0$, $P(S_0 \leq A - 1) = 1$.

On utilise alors la symétrie des coefficients binomiaux, puis changement d'indice, qui nous ramène à la formule de la Q30. appliqué à $p = A - 1$, $x = \frac{1}{M}$ qui tous calculs faits donne la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(S_n \leq A - 1) = \frac{M^A}{(M - 1)^A}$$

Or $P(T > n) \leq P(S_n \leq A - 1)$

Donc la série des $P(T > n)$ CV. Donc l'espérance de T existe grâce à l'énoncé.

Je dis alors que si $P(T = 0) \neq 0$ la série diverge grossièrement donc $P(T = 0) = 0$,

donc $P(T > n) = P(S_n < A) = P(S_n \leq A - 1)$.

J'ai fini, il y a bien égalité :

$$E(T) = \frac{M^A}{(M - 1)^A}$$

FIN