Exercice 1 - Classique (⋆⋆⋆)

On définit pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$$

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+$, et qu'elle est de classe $\mathbb{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $x > 0$ l'intégrale est convergente en $+\infty$ car négligeable devant $t \mapsto \frac{1}{t^2}$, et intégrable en 0 car majorée par $C\frac{\sin(t)}{t}$ où C est une constante à x fixé.

Pour $x = 0$, on reconnaît l'intégrale de Dirichlet qui est classiquement convergente mais pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Ensuite pour le caractère $\mathcal{C}^1$, on considère $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, avec $a < b$ ainsi que la fonction

$$f : (x,t) \mapsto \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}$$

Il s'agit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ comme produit/composée de fonction $\mathcal{C}^1$ sur ce même intervalle. De plus on a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| &= \left|-t\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\right| \\ &\leq e^{-at}\end{aligned}$$

On reconnaît dans le dernier membre de droite une fonction intégrable sur $[0,+\infty[$, et donc d'après le théorème de dérivation sous signe somme, on peut affirmer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$. Et de plus :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \sin(t)\, e^{-xt} dt$$

Comme le résultat est vrai pour a et b quelconque, on en déduit le caractère $\mathcal{C}^1$ de F sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. En déduire une expression simplifiée de F sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour calculer la valeur de $F'(x)$ on peut soit effectuer une double IPP, ou alors passer le sinus en exponentielle complexe. Ayant une préférence pour cette dernière, on calcul :

$$\begin{aligned}F'(x) &= \int_0^{+\infty} \sin(t)\, e^{-xt} dt \\ &= \Im\left(\int_0^{+\infty} e^{it-xt} dt\right) \\ &= \Im\left(\left[\frac{1}{i-x}e^{(i-x)t}\right]_0^{+\infty}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{i-x} - \frac{1}{-i-x}\right] \\ &= \frac{1}{2i}\left[\frac{-i-x-i+x}{|i-x|^2}\right] \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

On en déduit que F s'exprime sous la forme :

$$F(x) = -\arctan(x) + C$$

Pour déterminer C on va appliquer le théorème de convergence dominée à F. On remarque que pour tout $x > 1$ on a :

$$|f(x,t)| \leq \frac{e^{-t}}{t}$$

En particulier l'hypothèse de domination est satisfaite et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x,t)\, dt = 0$. On en déduit que $C = \frac{\pi}{2}$.

3. L'objectif de cette question est de montrer que F est continue en 0. Pour cela on considère la fonction :

$$G(t) = \int_t^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$$

3.a. Justifier que G est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, et donner la valeur de sa limite en $+\infty$.

On reconnaît dans G l'expression d'une primitive de la fonction :

$$g(t) = -\frac{\sin(t)}{t}$$

Dès lors G est de continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus par convergence de l'intégrale de Dirichlet, on peut affirmer que G est de limite nulle en $+\infty$.

3.b. Soit $x > 0$, exprimer $F(x) - F(0)$ à l'aide de G. En déduire que F est continue en 0.

L'objectif est d'utiliser la question précédente, ainsi afin de faire apparaître le fonction G on effectue une IPP, on obtient pour $(A, B) \in (\mathbb{R}_+)^2$:

$$\begin{aligned}
\int_B^A \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt - \int_B^A \frac{\sin(t)}{t} dt &= \int_B^A \left(e^{-xt} - 1\right) \frac{\sin(t)}{t} dt \\
&= \int_B^A - \left(e^{-xt} - 1\right) G'(t)\, dt \\
&= - \left[\left(e^{-xt} - 1\right) G(t)\right]_B^A + \int_B^A G(t) \times \left(-xe^{-xt}\right) dt
\end{aligned}$$

Dans le dernier membre de droite le premier terme tend vers 0 quand A tends vers $+\infty$ et B vers 0. De plus par changement de variable dans l'intégrale on obtient par passage à la limite :

$$F(x) - F(0) = \int_0^{+\infty} G\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} du$$

Désormais, on peut utiliser la question précédente pour affirmer que $\lim\limits_{x \to 0} G\left(\frac{u}{x}\right) = 0$, comme en plus elle est continue, on en déduit qu'elle est bornée. On peux alors appliquer le théorème de convergence dominée avec $\|G\|_\infty e^{-u}$. On obtient alors :

$$\lim_{x \to 0} F(x) - F(0) = 0$$

En particulier F est continue en 0.

4. *Bonus :* Déterminer la valeur de $F(0)$.

D'après la question 2 on sait que pour tout $x > 0$ on a :

$$F(x) = -\arctan(x) + \frac{\pi}{2}$$

Comme on vient de montrer que F est continue en 0 on en déduit par unicité de la limite que $F(0) = -\arctan(0) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2 - Intégrale et fonctions rationnels (⋆⋆)

Pour $n \geq 1$ et $x > 0$ on pose :

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^n}$$

1. Justifier l'existence de I_n pour tout $x > 0$.

Soit $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{(x^2+t^2)^n}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et donc intégrable sur tout segment. De plus en $+\infty$ on a l'équivalent :

$$\frac{1}{(x^2+t^2)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$$

Et donc par critère de Riemann, cette intégrale est bien définie.

2. Calculer $I_1(x)$.

On trouve :

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^2+t^2} \\ &= \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2} \\ &= \frac{1}{x^2}\left[x\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2x} \end{aligned}$$

3. Démontrer que I_n est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et former une relation de récurrence entre $I'_n(x)$ et $I_{n+1}(x)$.

On pose $f_n(x,t) = \frac{1}{(x^2+t^2)^n}$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[^2$. DE plus on a :

$$\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,t) = \frac{-2nx}{(x^2+t^2)^{n+1}}$$

Fixons alors $0 < a < b$ alors pour $x \in [a, b]$ on a :

$$\left|\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{2nb}{(a^2+t^2)^{n+1}}$$

Le majorant de cette expression est une fonction de t qui ne dépends pas de x et qui est intégrable sur $]0, +\infty[$, on en déduit que I_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Puis comme a, b sont quelconques on en déduit que I_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. De plus on a :

$$I'_n(x) = -2nxI_{n+1}(x)$$

4. En déduire qu'il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $x > 0$, on a :

$$I_n(x) = \frac{\lambda_n}{x^{2n-1}}$$

Que vaut λ_n ?

On démontre ce résultat par récurrence, d'après la question 2. l'initialisation est vraie avec $\lambda_1 = \frac{\pi}{2}$. Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose le résultat vraie pour I_n et l'on remarque que l'on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1}(x) &= \frac{-1}{2nx} I_n'(x) \\ &= \frac{1}{2nx} \frac{(2n-1)\,\lambda_n}{x^{2n}} \\ &= \frac{(2n-1)\,\lambda_n}{2n} \times \frac{1}{x^{2n+1}} \end{aligned}$$

On en déduit alors que la résultat est vraie pour I_{n+1}, ainsi par principe de récurrence on peut affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n(x) = \frac{\lambda_n}{x^{2n-1}}$ où (λ_n) est la suite définie par :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & \frac{\pi}{2} \\ \lambda_{n+1} & = & \frac{(2n-1)\lambda_n}{2n} \end{array} \right.$$

On en déduit avec un peu de calcul que $\lambda_n = \dfrac{(2n-2)!}{2^{2n-1}\left((n-1)!\right)^2}\pi$.

Exercice 3 - Un exemple (★★)

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

La fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est continue sur $]0,1]$. De plus en 0, elle est équivalente à t^{x-1}, qui est une fonction intégrable au voisinage de 0 si, et seulement si, $x-1 > -1$ soit $x > 0$. Ainsi $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

2. Démontrer que f est continue sur son domaine de définition.

On fixe un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, l'application $(x,t) \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est continue sur $[a,b] \times]0,1[$ comme fonction de deux variables. De plus, pour tout $x \in [a,b]$ et tout $t \in]0,1[$ on a :

$$0 \leq \frac{t^{x-1}}{1+t} \leq \frac{t^{a-1}}{1+t}$$

Or la fonction $t \mapsto \frac{t^{a-1}}{1+t}$ est intégrable sur $]0,1[$, on peut donc appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres, ce qui prouve que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. 3.a. Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$.

On a :

$$\begin{aligned}
f(x)+f(x+1) &= \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt + \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt \\
&= \int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^x}{1+t}dt \\
&= \int_0^1 t^{x-1}\frac{1+t}{1+t}dt \\
&= \int_0^1 t^{x-1}dt \\
&= \left[\frac{1}{x}t^x\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

3.b. En déduire un équivalent de f en 0.

Si $x \to 0$ alors $f(x+1) \to f(1)$ car f est continue en 1. par quotient d'après ce qui précède on trouve :

$$x \times (f(x)+f(x+1)) = xf(x) + xf(x+1) = 1$$

Or $xf(x+1) \to 0$ quand x tends vers 0 puisque $f(1) \in \mathbb{R}$ est finie. Finalement on en déduit que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}$.

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée. Pour tout $x \geq 1$, on a :

$$\left|\frac{t^{x-1}}{1+t}\right| \leq \frac{1}{1+t}$$

qui est une fonction intégrable sur $]01,1[$. De plus, pour tout $t \in]0,1[$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{t^{x-1}}{1+t} = 0$. On en déduit par le théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Une autre possibilité aurait été d'encadrer f par $0 \leq f(x) \leq \int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x}$.

Exercice 4 - Transformée de Fourier (⋆⋆⋆⋆)

En formant une équation différentielle vérifiée par f, calculer la valeur de :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{itx}dt$$

Indication : On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On remarque d'abord que f est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, puisque :

$$\left|\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{itx}\right| \leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$$

Qui est intégrable sur $[0,+\infty[$, car en 0 elle est équivalente à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ qui est intégrable, et au voisinage de $+\infty$

elle vérifie :

$$\left|\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\right| \leq \frac{1}{t^2}$$

Prouvons également que f est $\mathcal{C}^1$. Pour cela on remarque que la fonction :

$$g:(x,t)\mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{itx}$$

Admet en tout point de $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à x qui est égale à :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = i\sqrt{t}e^{-t}e^{itx}$$

Qui est intégrable sur $]0,+\infty[$, car elle est continue en 0 et au voisinage de $+\infty$ elle est majorée par $\frac{1}{t^2}$. On en déduit par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres que f est dérivable, avec :

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{-t}e^{itx}dt$$

Il ne reste plus qu'à exprimer le terme de droite de cette égalité à l'aide de f par l'intermédiaire d'une IPP avec $u : t\mapsto \frac{1}{ix-1}e^{(ix-1)t}$ et $v : t\mapsto \sqrt{t}$ on trouve alors pour $A\in\mathbb{R}$ fixé :

$$\begin{aligned}\int_0^A i\sqrt{t}e^{-t}e^{itx}dt &= \left[\frac{\sqrt{t}}{ix-1}e^{(ix-1)t}\right]_0^A - \frac{i}{2\left(ix-1\right)}\int_0^A \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{itx}dt \\ &= \frac{\sqrt{A}}{ix-1}e^{(ix-1)A} - \frac{i\left(-ix-1\right)}{2\left(x^2+1\right)}\int_0^A \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{itx}dt \\ &= \frac{\sqrt{A}}{ix-1}e^{(ix-1)A} + \frac{-x+i}{2\left(x^2+1\right)}\int_0^A \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{itx}dt\end{aligned}$$

Par passage à la limite en $A\to+\infty$ on trouve alors :

$$f'(x) = \frac{-x+i}{2\left(x^2+1\right)}f(x)$$

Il suffit de résoudre alors cette équation différentielle en cherchant une primitive de $x\mapsto \frac{-x+i}{2(x^2+1)} = \frac{i}{2(x^2+1)} - \frac{x}{2(x^2+1)}$, par exemple $x\mapsto \frac{i}{2}\arctan(x) - \frac{1}{4}\ln\big(x^2+1\big)$. On en déduit que f, solution de cette équation différentielle, est de la forme :

$$f : x\mapsto C\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{4}}\exp\!\left(\frac{i}{2}\arctan(x)\right)$$

On détermine la valeur de C en calculant :

$$f(0) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du$$

En ayant effectué le changement de variable $t=u^2$. Utilisant le rappel, on trouve $C=\sqrt{\pi}$.

Exercice 5 - Calcul d'une intégrale impropre (⋆⋆)

On pose pour $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$$

1. Justifier que F est définie sur $\mathbb{R}$.

> Si $x = 0$ il n'y a pas de problème, sinon $\sin(xt) \underset{t \to 0}{\sim} xt$ et donc la fonction $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$ se prolonge par continuité en 0. Ainsi prolongée cette fonction est continue sur $[0, +\infty[$ et de plus elle est majorée par la fonction $t \mapsto e^{-t}$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$. On en conclut que F est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que F est ce classe $\mathcal{C}^1$ et donner une expression de F'.

> On considère $f : (x,t) \mapsto \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \cos(xt)\, e^{-t}$ est définie sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$.
>
> Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ est une fonction continue et de plus on a :
>
> $$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| = e^{-t}$$
>
> Qui est encore intégrable sur $[0, +\infty[$, ainsi par théorème de dérivation sous signe intégrale on en déduit que F est dérivable et que de plus :
>
> $$F'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)\, e^{-t} dt$$
>
> Afin de calculer cette intégrale on pose $\cos(xt) = \Re\left(e^{ixt}\right)$ et on considère $A \in \mathbb{R}$ on a alors :
>
> $$\begin{aligned} \int_0^A \Re\left(e^{ixt}\right) e^{-t} dt &= \Re\left(\int_0^A e^{(ix-1)t} dt \right) \\ &= \Re\left(\left[\frac{1}{ix-1} e^{(ix-1)t} \right]_0^A \right) \\ &= \Re\left(\frac{1}{ix-1} e^{(ix-1)A} - \frac{1}{ix-1} \right) \\ &= \Re\left(\frac{1}{1-ix} \right) + \Re\left(\frac{1}{ix-1} e^{(ix-1)A} \right) \end{aligned}$$
>
> Le dernier terme de cette expression tendant vers 0 lorsque A tends vers $+\infty$, on en déduit par passage à la limite :
>
> $$\begin{aligned} F'(x) &= \Re\left(\frac{1}{1-ix} \right) \\ &= \frac{1}{|1-ix|^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

3. En déduire une expression simplifié de F.

> On en déduit que F est de la forme $F : x \mapsto \arctan(x) + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Or $F(0) = 0$ on en déduit finalement que $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \arctan(x)$.

Exercice 6 - Un calcul de l'intégrale de Gauss (⋆⋆⋆)

Le but de l'exercice est de calculer la valeur de :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

On définit deux fonctions f et g sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-\left(t^2+1\right)x^2}}{t^2+1} dt$$

1. Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) + f^2(x) = \frac{\pi}{4}$.

On pose $h = g + f^2$ on va montrer que h est constante, pour cela on remarque que $u : (x,t) \mapsto \frac{e^{-\left(t^2+1\right)x^2}}{t^2+1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et de plus on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -2x\left(t^2+1\right)\frac{e^{-\left(t^2+1\right)x^2}}{t^2+1} = -2xe^{-\left(t^2+1\right)x^2} = -2xe^{-x^2}e^{-(tx)^2}$$

Cette dérivée est une fonction continue, en particulier sur un compact $[a,b] \times [0,1]$ elle est bornée par une constante M. Or cette fonction constante est intégrable sur $]0,1[$, on en déduit par théorème de dérivation sous signe intégrale que g est dérivable et de plus on a :

$$g'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-(tx)^2} dt$$

Enfin f est dérivable d'après le théorème fondamental de l'analyse, et on a $f'(x) = e^{-x^2}$. On en déduit que h est dérivable et de plus :

$$\begin{aligned}
h'(x) &= g'(x) + 2f'(x)\,f(x) \\
&= -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-(tx)^2} dt + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \\
&= -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

Où l'on a effectué le changement de variable $u = tx$ dans la première intégrale. On en déduit alors que h est une fonction constante et de plus :

$$h(0) = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt + 0 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

D'où le résultat.

2. En déduire la valeur de I.

On souhaite faire tendre x vers $+\infty$ et montrer que g tends vers 0 pour cela on peut appliquer le théorème de convergence dominée, ou on peut aussi remarquer que :

$$0 \le \frac{e^{-\left(t^2+1\right)x^2}}{t^2+1} \le e^{-x^2}$$

Et donc :

$$0 \le g(x) \le \int_0^1 e^{-x^2} dt = e^{-x^2}$$

Ainsi par théorème d'encadrement on en conclut que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$. Comme h est constante elle admet une limite, et donc $f^2 = h - g$ admet également une limite qui vaut $\frac{\pi}{4}$. Enfin comme e^{-t^2} est une fonction positive on en déduit que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.