

CONCOURS COMMUN MINES-PONTS 2021

Épreuve de mathématiques II
(corrigé)

Noyaux de type positif

Quelques résultats préliminaires

1. Soit vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Posons : $Y = AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors $X^\top Y$ est le produit scalaire (usuel sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$) de X par Y , donc :

$$X^\top Y = \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

Or la définition du produit matriciel implique :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad y_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} x_i.$$

On en déduit le résultat voulu :

$$X^\top AX = X^\top Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j.$$

2. Supposons $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$ une valeur propre de A (on sait d'après le théorème spectral qu'une valeur propre de A est nécessairement réelle), dont on note X un vecteur propre associé. Du fait que A soit positive, on a : $X^\top AX \geq 0$, mais on a aussi :

$$X^\top AX = X^\top (\lambda X) = \lambda X^\top X.$$

On reconnaît là la norme euclidienne de X au carré, associée au produit scalaire usuel. Comme X est un vecteur propre de A , il est en particulier non nul, donc : $X^\top X > 0$, et ensuite :

$$\lambda = \frac{X^\top AX}{X^\top X} \geq 0,$$

d'où le résultat : les valeurs propres de A sont des réels positifs ou nuls.

3. Soit $x \in [a, b]$. On justifie la continuité de φ grâce au théorème de continuité des intégrales à paramètres. L'application f est continue sur $[a, b] \times [c, d]$, donc continue sur $[a, x]$ par rapport à u et sur $[c, d]$ par rapport à t , et d'après le théorème des bornes atteintes (il est facile de montrer que $[a, b] \times [c, d]$ est une partie fermée et bornée de $\mathbf{R}^2$) il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\forall (u, t) \in [a, x] \times [c, d] \quad |f(u, t)| \leq M \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}).$$

L'application $u \mapsto M$ est évidemment continue (par morceaux) donc intégrable sur le segment $[a, x]$. Toutes les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètres sont vérifiées, donc l'application $t \mapsto \varphi(x, t) = \int_a^x f(u, t) du$ est continue sur $[c, d]$.

4. On utilise le théorème de dérivation des intégrales à paramètres pour démontrer la classe C^1 de $\psi : x \mapsto \int_c^d \varphi(x, t) dt$:

- pour tout $t \in [c, d]$, l'application $x \mapsto \varphi(x, t)$ est de classe C^1 sur $[a, b]$ d'après le théorème fondamental de l'analyse, et on a :

$$\forall t \in [c, d], \forall x \in [a, b], \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = f(x, t) ;$$

- pour tout $x \in [a, b]$, les applications $t \mapsto \varphi(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = f(x, t)$ sont continues (par morceaux) sur $[c, d]$: pour φ cela fut démontré à la question précédente, et pour $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ c'est vrai par hypothèse sur f ;
- pour tout $x \in [a, b]$, l'application $t \mapsto \varphi(x, t)$ est intégrable sur $[c, d]$ puisqu'elle est continue (par morceaux) sur un SEGMENT ;
- pour tout $(x, t) \in [a, b] \times [c, d]$ on a encore, d'après la question précédente (où l'on a noté M un majorant de f sur $[a, b] \times [c, d]$) :

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times [c, d] \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| = |f(x, t)| \leq M \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}),$$

et la fonction de domination $t \mapsto M$ est bien entendu continue par morceaux et intégrable sur le segment $[c, d]$.

Donc, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, l'application ψ est de classe C^1 sur $[a, b]$, et on a :

$$\forall x \in [a, b], \quad \psi'(x) = \int_c^d \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) dt = \int_c^d f(x, t) dt.$$

5. Soit $x \in [a, b]$. On intègre sur $[a, x]$ l'identité vérifiée par ψ' d'après la question précédente, et on obtient :

$$\int_a^x \psi'(u) du = \int_a^x \left(\int_c^d f(x, t) dt \right) du.$$

Or : $\int_a^x \psi'(u) du = \psi(x) - \psi(a) = \int_c^d \varphi(x, t) dt - \int_c^d \varphi(a, t) dt$, et d'après la définition de φ on a :

$\forall t \in [c, d]$, $\varphi(a, t) = \int_a^a f(u, t) du = 0$. Donc : $\int_a^x \psi'(u) du = \int_c^d \varphi(x, t) dt$. On a montré :

$$\int_c^d \varphi(x, t) dt = \int_a^x \left(\int_c^d f(x, t) dt \right) du.$$

Or : $\forall t \in [c, d]$, $\varphi(x, t) = \int_a^x f(u, t) du$, donc cette égalité équivaut à :

$$\int_c^d \left(\int_a^x f(u, t) du \right) dt = \int_a^x \left(\int_c^d f(x, t) dt \right) du.$$

d'où le résultat.

6. Soit n au voisinage de l'infini. On utilise la relation de Chasles deux fois pour se ramener à des intervalles de la forme $[u_k, u_{k+1}]$ et $[t_\ell, t_{\ell+1}]$ (notons qu'on a $u_0 = a$, $u_n = b$, $t_0 = c$ et $t_n = d$) :

$$\int_a^b \int_c^d f(u, t) du dt = \int_a^b \sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} f(u, t) du dt = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} f(u, t) du dt.$$

On a aussi clairement, puisque cela revient à intégrer une fonction constante :

$$\begin{aligned} \forall (k, \ell) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \quad f(u_k, t_\ell) &= \frac{1}{(u_{k+1} - u_k)(t_{\ell+1} - t_\ell)} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} f(u, t) du dt \\ &= \frac{n^2}{(b-a)(d-c)} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} f(u, t) du dt. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} f(u_k, t_\ell) du dt,$$

et donc, d'après tout ce qui précède :

$$\begin{aligned} \left| S_n(f) - \int_a^b \int_c^d f(u, t) du dt \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} (f(u_k, t_\ell) - f(u, t)) du dt \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} |f(u_k, t_\ell) - f(u, t)| du dt \end{aligned}$$

Grâce à la condition $\mathcal{L}$ supposée dans l'énoncé, on peut majorer l'intégrande ci-dessus ainsi :

$$\forall (k, \ell) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \quad |f(u_k, t_\ell) - f(u, t)| \leq M (|u_k - u| + |t_\ell - t|).$$

Donc (au moment d'intégrer nous privilégions des primitives qui s'annulent en les bornes d'intégration ; attention, aussi, à ne pas être induit en erreur par l'ordre des éléments différentiels donné dans l'intégrale double de l'énoncé : nous allons d'abord intégrer selon t , or t va de t_ℓ à $t_{\ell+1}$) :

$$\begin{aligned} \left| S_n(f) - \int_a^b \int_c^d f(u, t) du dt \right| &\leq M \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \left(\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} (u - u_k + t - t_\ell) dt \right) du \\ &= M \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \left[(t - t_\ell)(u - u_k) + \frac{(t - t_\ell)^2}{2} \right]_{t=t_\ell}^{t=t_{\ell+1}} du \\ &= M \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \left[(t_{\ell+1} - t_\ell)(u - u_k) + \frac{(t_{\ell+1} - t_\ell)^2}{2} \right] du \\ &= M \frac{d-c}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \left[(u - u_k) + \frac{d-c}{2n} \right] du \\ &= M \frac{d-c}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} \left[\frac{(u - u_k)^2}{2} + \frac{d-c}{2n} (u - u_k) \right]_{u_k}^{u_{k+1}} \\ &= M \frac{d-c}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} \left[\frac{(u_{k+1} - u_k)^2}{2} + \frac{d-c}{2n} (u_{k+1} - u_k) \right] \\ &= M \frac{d-c}{n} \frac{a-b}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} \left[\frac{a-b}{2n} + \frac{d-c}{2n} \right] \\ &= M \frac{d-c}{n} \frac{a-b}{n} \times \left[\frac{b-a}{2n} + \frac{d-c}{2n} \right] \times n^2 \\ &= M \frac{(d-c)(a-b)}{2n} ((b-a) + (d-c)). \end{aligned}$$

En conclusion, nous avons montré que pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$0 \leq \left| S_n(f) - \int_a^b \int_c^d f(u, t) du dt \right| \leq M \frac{(d-c)(a-b)}{2n} ((b-a) + (d-c)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_a^b \int_c^d f(u, t) du dt$. Ce qu'il fallait démontrer.

Noyaux de type positif

7. Un produit scalaire est symétrique, donc K l'est. Il s'agit donc de démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $(x_1, \dots, x_n) \in H^n$, la matrice de covariance :

$$A = \text{Cov}_K(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i | x_j \rangle_H)_{1 \leq i, j \leq n}$$

appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ (c'est bien une matrice symétrique). Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in H^n$. On introduit :

- le sous-espace vectoriel $F \subseteq H$ engendré par les x_i (c'est un sous-espace vectoriel de dimension finie, ce qui va nous permettre d'écrire le produit scalaire dans une base orthonormée : là est l'idée de ce qui suit) ;
- une base $\mathcal{B} = (y_1, \dots, y_d)$ orthonormée de F ;
- la matrice $P = M_{\mathcal{B}}((x_1, \dots, x_n)) = ((p_{i,j}))_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq n}}$ exprimant les coordonnées de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Alors on sait que, la base $\mathcal{B}$ étant orthonormée, on a :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \langle x_i | x_j \rangle_H = \sum_{k=1}^d \langle x_i | y_k \rangle_H \langle y_k | x_j \rangle_H = \sum_{k=1}^d \langle x_i | y_k \rangle_H \langle y_k | x_j \rangle_H.$$

Le membre de gauche est le coefficient (i, j) de $A = \text{Cov}_K(x_1, \dots, x_n)$. Le membre de droite est le coefficient (i, j) de $P^\top P$. On en déduit :

$$A = P^\top P,$$

et donc :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \quad X^\top A X = X^\top P^\top P X = (P X)^\top P X \geq 0,$$

puisque'il s'agit de la norme euclidienne au carré de PX (associée au produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbf{R})$). Ainsi A est bien positive, d'où le résultat.

On a démontré que K est un NTP.

8. Si K vérifie la propriété $(\mathcal{R})$, alors la symétrie de K est évidente. Pour montrer que la matrice de covariance est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$, il suffit de reproduire le raisonnement de la question précédente : si la matrice symétrique $(\langle y_i | y_j \rangle_H)_{1 \leq i, j \leq n}$ est positive pour tout $(y_1, \dots, y_n) \in H^n$, alors elle est en particulier positive si l'on prend $(y_1, \dots, y_n) = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) \in H^n$ avec $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega^n$. Ainsi K est un NTP.
9. Supposons que K est un NTP sur un ensemble fini $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$. Il est utile de remarquer, avant de traiter cette question, que si l'on note $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, alors pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ on a :

$$K(x_i, x_j) = E_i^\top \text{Cov}_K(x_1, \dots, x_n) E_j. \quad (*)$$

Cela se démontre très rapidement à l'aide du résultat de la question 1, et c'est ce qui va motiver la définition de φ qui suit. La matrice $\text{Cov}_K(x_1, \dots, x_n)$ est symétrique réelle, donc d'après le théorème spectral il existe $P \in O_n(\mathbf{R})$ telle que :

$$\text{Cov}_K(x_1, \dots, x_n) = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix} P^\top$$

où les λ_i sont les valeurs propres de $\text{Cov}_K(x_1, \dots, x_n)$ comptées autant de fois que leurs ordres de multiplicité. D'après la question 2, on a $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Posons alors :

$$R = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^\top, \quad \text{et : } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi(x_i) = RE_i.$$

Ceci définit une application $\varphi : \Omega \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Notons que R est symétrique et $R^2 = \text{Cov}_K(x_1, \dots, x_n)$ (vérification facile). Si l'on note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, alors on a pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$\langle \varphi(x_i) | \varphi(x_j) \rangle = (RE_i)^\top RE_j = E_i^\top R^\top RE_j = E_i^\top R^2 E_j = E_i^\top \text{Cov}_K(x_1, \dots, x_n) E_j \stackrel{(*)}{=} K(x_i, x_j),$$

ce qui prouve que K vérifie la propriété $(\mathcal{R})$ avec $H = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ muni du produit scalaire usuel, et φ l'application définie ci-dessus. Ce qu'il fallait démontrer.

10. La bilinéarité est évidente, par linéarité de l'intégrale et distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et la symétrie de $\langle \cdot | \cdot \rangle_H$ découle de la commutativité du produit de fonctions réelles. Vérifions que cette forme bilinéaire symétrique est également définie positive. Soit $f \in H$. On a :

$$\langle f | f \rangle_H = \int_0^1 (f'(t))^2 dt \geq 0$$

par croissance de l'intégrale (en effet on intègre une fonction réelle au carré, donc une fonction positive). De plus, si $\langle f | f \rangle_H = 0$ alors : $\int_0^1 (f'(t))^2 dt = 0$. Comme f n'est pas supposée de classe C^1 , mais de classe C^1 par morceaux, on ne peut pas immédiatement utiliser la propriété de séparation de l'intégrale pour conclure, mais nous allons nous y ramener : soit $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1$ une subdivision de l'intervalle $[0, 1]$ telle que, pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, l'application $f|_{[x_i, x_{i+1}[}$ soit prolongeable sur $[x_i, x_{i+1}]$ en une fonction $\tilde{f}_i$ de classe C^1 . On a, grâce à la relation de Chasles :

$$\int_0^1 (f'(t))^2 dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\tilde{f}_i'(t))^2 dt.$$

Donc l'égalité $\int_0^1 (f'(t))^2 dt = 0$ équivaut à : $\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\tilde{f}_i'(t))^2 dt = 0$. Toutes les intégrales de cette somme sont positives, or une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme de la somme est nul, donc : $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\tilde{f}_i'(t))^2 dt = 0$. L'application $(\tilde{f}_i')^2$ est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$ (parce que $\tilde{f}_i$ est de classe C^1 sur ce segment) et positive, donc par propriété de séparation de l'intégrale : elle est d'intégrale nulle seulement si elle est nulle. Ainsi :

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall t \in [x_i, x_{i+1}], \tilde{f}_i'(t) = 0.$$

Comme $\tilde{f}_i$ est de dérivée nulle sur un intervalle, c'est une fonction constante. Ainsi f est constante sur tout intervalle de la forme $[x_i, x_{i+1}]$, et comme elle est continue elle est égale à la même constante sur tous ces intervalles (sinon on aurait $\lim_{x_i^-} f \neq \lim_{x_i^+} f$ et cela contredirait la continuité en x_i). Ainsi f est constante sur $[0, 1]$, et comme $f(0) = 0$ par définition de H on peut conclure : $f = 0$. Ceci prouve le caractère défini de $\langle \cdot | \cdot \rangle_H$.

Puisque $\langle \cdot | \cdot \rangle_H$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est un produit scalaire sur H . Ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. La classe C^1 par morceaux n'est pas au programme de PSI...

11. Comme indiqué, posons : $\forall x \in [0, 1], \varphi(x) = K_x$. Autrement dit, pour tout $x \in [0, 1]$, $\varphi(x)$ est l'application $t \mapsto \min(x, t)$. Vérifions qu'il s'agit d'une application de H . Soit $x \in [0, 1]$. On a bien $\varphi(x)(0) = \min(x, 0) = 0$. Ensuite, on note que $\varphi(x)$ est égale à $y \mapsto y$ sur $[0, x[$, et constante égale à x sur $]x, 1]$. On en déduit :

- que $\varphi(x)$ est continue sur $[0, x[$ et $]x, 1]$, et comme on a : $\lim_{t \rightarrow x^-} \varphi(x)(t) = \lim_{t \rightarrow x^+} \varphi(x)(t) = x$, l'application $\varphi(x)$ est continue sur $[0, 1]$;
- que $\varphi(x)$ de classe C^1 par morceaux sur $[0, 1]$ (une subdivision convenable étant $0 < x < 1$), et on a en outre :

$$\forall t \in [0, 1] \setminus \{x\}, \quad \varphi(x)'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > x, \\ 1 & \text{si } t < x. \end{cases}$$

Calculons à présent $\langle \varphi(x) | \varphi(y) \rangle_H$ pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$ (l'objectif est de démontrer que c'est égal à $K(x, y) = \min(x, y)$). Soit $(x, y) \in [0, 1]^2$. Il ne coûte rien de supposer $x < y$ (l'étude est symétrique en x et y). Avec la relation de Chasles, plaçons-nous sur des segments où les dérivées sont simplifiables :

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x) | \varphi(y) \rangle_H &= \int_0^1 \varphi(x)' \varphi(y)' \\ &= \int_0^x \varphi(x)' \varphi(y)' + \int_x^y \varphi(x)' \varphi(y)' + \int_y^1 \varphi(x)' \varphi(y)' \\ &= \int_0^x 1 \times 1 + \int_x^y 0 \times 1 + \int_y^1 0 \times 0 \\ &= x, \end{aligned}$$

et de même $\langle \varphi(x) | \varphi(y) \rangle_H = y$ si $y > x$ (et pour $y = x$). On a donc :

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \quad \langle \varphi(x) | \varphi(y) \rangle_H = \begin{cases} x & \text{si } x \leq y, \\ y & \text{si } x \geq y, \end{cases}$$

donc en tous les cas : $\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \langle \varphi(x) | \varphi(y) \rangle_H = \min(x, y) = K(x, y)$. On a démontré que K vérifie la propriété $(\mathcal{R})$, avec $\varphi : [0, 1] \rightarrow H$ l'application $x \mapsto K_x$.

Opérateurs à noyau

12. Si $u_K = u_{K'}$, alors :

$$\forall f \in E, \forall x \in I, \quad u_K(f)(x) - u_{K'}(f)(x) = \langle K_x - K'_x | f \rangle = 0.$$

Ceci vaut pour toute fonction $f \in E$, donc en particulier pour $f = K_x - K'_x$. On a alors :

$$\forall x \in I, \quad \|K_x - K'_x\|_2^2 = 0,$$

donc par propriété de séparation de la norme : $\forall x \in I, K_x - K'_x = 0$, c'est-à-dire : $\forall x \in I, K_x = K'_x$. On a donc, pour tout $(x, y) \in I^2$: $K(x, y) = K'(x, y)$, ce qui signifie que $K = K'$, ce qu'on voulait démontrer.

13. Il est clair que u_K est une application linéaire définie sur E , par linéarité à droite du produit scalaire. Pour montrer que c'est un endomorphisme de E , il faut montrer :

$$\forall f \in E, \quad u_K(f) \in E,$$

c'est-à-dire : montrer que si $f \in E$ alors l'application $x \mapsto u_K(f)(x) = \int_a^b K(x, t)f(t)dt$ est continue sur I . C'est immédiat avec le théorème de continuité des intégrales à paramètres : les

hypothèses sur K et f assurent que $(x, t) \mapsto K(x, t)f(t)$ est continue sur $I \times I$, donc continue par rapport à chaque variable, et le théorème des bornes atteintes sur le fermé borné $I \times I$ assure l'existence de $M \in \mathbf{R}$ tel que : $\forall (x, t) \in I^2, |K(x, t)| \leq M$, de sorte que :

$$\forall (x, t) \in I^2, |K(x, t)f(t)| \leq M|f(t)|. \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

L'application $t \mapsto M|f(t)|$ étant continue par morceaux par hypothèse sur f , et intégrable sur I (il s'agit d'une application continue sur un segment), l'hypothèse de domination est vérifiée et on peut bien appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Ainsi $u_K(f)$ est continue pour tout $f \in E$, et donc u_K est un endomorphisme de E .

Montrons à présent que u_K est continue de $(E, \|\cdot\|_2)$ dans lui-même, en montrant que c'est une application lipschitzienne. Soit $f \in E$. Pour tout $x \in I$ on a, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|u_K(f)(x)| = |\langle K_x | f \rangle| \leq \|K_x\|_2 \|f\|_2,$$

et donc :

$$\|u_K(f)\|_2^2 = \int_I u_K(f)^2(t) dt \leq \int_I \|K_t\|_2^2 \|f\|_2^2 dt = \|f\|_2^2 \int_I \|K_t\|_2^2 dt.$$

Par conséquent, si l'on pose : $\kappa = \sqrt{\int_I \|K_t\|_2^2 dt}$, alors :

$$\forall f \in E, \|u_K(f)\|_2 \leq \kappa \|f\|_2,$$

ce qui prouve que u_K est une application κ -lipschitzienne, donc continue : d'où le résultat.

14. Soit $(f, g) \in E^2$. Nous devons montrer : $\langle u_K(f) | g \rangle = \langle f | u_K(g) \rangle$. Pour cela, on utilise le théorème de Fubini démontré à la question 5 :

$$\begin{aligned} \langle u_K(f) | g \rangle &= \int_I u_K(f)(t)g(t)dt = \int_I \left(\int_I K(t, u)f(u)g(t)du \right) dt \\ &= \int_I \left(\int_I K(t, u)f(u)g(t)dt \right) du \\ &= \int_I \left(\int_I K(t, u)g(t)dt \right) f(u)du \\ &= \int_I \left(\int_I K(u, t)g(t)dt \right) f(u)du \quad (K \text{ est symétrique}) \\ &= \int_I u_K(g)(u)f(u)du = \langle u_K(g) | f \rangle = \langle f | u_K(g) \rangle, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. C'est valable pour tout $(f, g) \in E^2$, donc u_K est symétrique.

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont orthogonaux deux à deux, ce qui prouve que si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de u_K et si f_λ, f_μ en sont deux vecteurs propres associés, alors f_λ et f_μ sont orthogonaux. Peut-être le sujet en attendait-il une démonstration. Auquel cas, il suffit d'écrire qu'on a :

$$\lambda \langle f_\lambda | f_\mu \rangle = \langle \lambda f_\lambda | f_\mu \rangle = \langle u_K(f_\lambda) | f_\mu \rangle = \langle f_\lambda | u_K(f_\mu) \rangle = \langle f_\lambda | \mu f_\mu \rangle = \mu \langle f_\lambda | f_\mu \rangle,$$

ce qui implique : $(\lambda - \mu) \langle f_\lambda | f_\mu \rangle = 0$. Comme $\lambda - \mu \neq 0$ par hypothèse sur λ et μ , on a : $\langle f_\lambda | f_\mu \rangle = 0$. Donc f_λ et f_μ sont orthogonaux.

15. Soit $f \in E$. On a, d'après la question 6 :

$$\langle u_K(f) | f \rangle = \int_I u_K(f)(t)f(t)dt = \int_I \int_I K(t, u)f(u)f(t)dudt = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n,$$

où l'on a, en notant : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $u_k = a + k \frac{b-a}{n}$,

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad S_n = \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} K(u_k, u_\ell) f(u_k) f(u_\ell).$$

Cette écriture permet de reconnaître, grâce à la question 1 (avec $A = \text{Cov}_K(u_0, \dots, u_{n-1}) = (K(u_i, u_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ et $X = \begin{pmatrix} f(u_0) \\ \vdots \\ f(u_{n-1}) \end{pmatrix}$) :

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad S_n = \frac{(b-a)^2}{n^2} X^\top \text{Cov}_K(u_0, \dots, u_{n-1}) X.$$

Comme K est un NTP, la matrice $\text{Cov}_K(u_0, \dots, u_{n-1})$ est positive, donc par définition : $X^\top \text{Cov}_K(u_0, \dots, u_{n-1}) X \geq 0$. Ainsi $S_n \geq 0$ pour tout entier $n \geq 1$, et donc par passage à la limite on a également : $\langle u_K(f) | f \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \geq 0$. D'où le résultat.

On en déduit, en raisonnant comme dans la question 2, que les valeurs propres de u_K sont positives ou nulles. En effet, si $\lambda \in \mathbf{R}$ est une valeur propre de u_K dont on note $f \in E$ un vecteur propre associé, alors :

$$\langle u_K(f) | f \rangle = \langle \lambda f | f \rangle = \lambda \langle f | f \rangle,$$

et comme f est un vecteur propre, il est non nul. On en déduit $\langle f | f \rangle > 0$ d'après le caractère défini du produit scalaire, et donc :

$$\lambda = \frac{\langle u_K(f) | f \rangle}{\langle f | f \rangle} \geq 0$$

en tant que quotient de deux réels positifs.

16. Montrons d'abord que l'application $g = u_K(f)$ est effectivement une solution. Vérifions préalablement qu'il s'agit bien d'une application de classe C^2 . Pour tout $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned} g(x) = u_K(f)(x) &= \int_0^1 K(x, t) f(t) dt = \int_0^x K(x, t) f(t) dt + \int_x^1 K(x, t) f(t) dt \\ &= \int_0^x t f(t) dt - x \int_1^x f(t) dt. \end{aligned}$$

De cette expression il ressort aisément que $g(0) = 0$.

De plus l'application f est continue sur I , donc $t \mapsto t f(t)$ également en tant que produit de fonctions continues. Donc, d'après le théorème fondamental de l'analyse, les applications $x \mapsto \int_0^x t f(t) dt$ et $x \mapsto \int_1^x f(t) dt$ sont de classe C^1 sur I , de dérivées respectives $x \mapsto x f(x)$ et $x \mapsto f(x)$. Ainsi g est de classe C^1 sur I , et on a :

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = x f(x) - \int_1^x f(t) dt - x f(x) = - \int_1^x f(t) dt.$$

Ce calcul nous montre d'une part que $g'(1) = 0$, et d'autre part que g' est égale à l'opposée d'une fonction de classe C^1 sur I (voir justification ci-dessus), donc g est de classe C^2 sur I , et on a :

$$\forall x \in I, \quad g''(x) = -f(x).$$

Ainsi $g = u_K(f)$ vérifie bien :

$$\begin{cases} g'' &= -f \\ g(0) &= g'(1) = 0, \end{cases}$$

c'est donc une solution de $(\mathcal{P})$.

Montrons à présent l'unicité de la solution : si h est une autre solution de $(\mathcal{P})$, alors on a : $(g-h)'' = g'' - h'' = -f - (-f) = 0$, donc $(g-h)'$ est constante sur I . Comme $(g-h)'(1) = g'(1) - h'(1) = 0$, cette constante est nulle : $(g-h)' = 0$. On en déduit que $g-h$ est constante sur I , et comme $(g-h)(0) = 0$ elle est constante égale à 0. Donc $g-h=0$, puis : $g=h$. Ceci prouve l'unicité de la solution au problème $(\mathcal{P})$.

En conclusion, le problème $(\mathcal{P})$ admet pour unique solution $g = u_K(f)$, où K est le NTP défini par :

$$\begin{aligned} K : I \times I &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, t) &\longmapsto \min(x, t). \end{aligned}$$

17. Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+$ (on prend $\lambda \in \mathbf{R}_+$ puisque les valeurs propres de u_K sont positives ou nulles d'après la question 15). Résolvons : $u_K(f) = \lambda f$, d'inconnue $f \in E$. D'après la question précédente, si $u_K(f) = \lambda f$, alors λf est de classe C^2 sur I et solution de $(\mathcal{P})$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} (\lambda f)'' &= -f \\ (\lambda f)(0) &= (\lambda f)'(1) = 0. \end{cases}$$

Il en résulte que soit $\lambda = 0$, auquel cas $-f = 0$, et dans ce cas $u_K(f) = 0$ n'a pas d'autre solution f que la fonction nulle : on en déduit que 0 n'est pas valeur propre ; soit $\lambda \neq 0$ (ce que nous supposons dans tout le reste du raisonnement), et dans ce cas on sait déterminer les solutions de l'équation différentielle du second ordre :

$$\lambda y'' + y = 0$$

via l'étude de l'équation caractéristique : $\lambda r^2 + 1 = 0$. Ses racines sont : $r_{1,2} = \pm \frac{i}{\sqrt{\lambda}}$. On en déduit que les solutions de $\lambda y'' + y = 0$ sont les applications de la forme :

$$x \mapsto \alpha \cos\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + \beta \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. Par conséquent, si f vérifie $u_K(f) = \lambda f$, alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ tel que f soit de la forme ci-dessus. De plus, on doit avoir : $(\lambda f)(0) = (\lambda f)'(1) = 0$ (et donc $f(0) = f'(1) = 0$, étant donné qu'on s'est placé dans le cas où $\lambda \neq 0$), ce qui se traduit par le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha &= 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) &= 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \end{cases} \quad \text{ou} : \begin{cases} \alpha &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} &\equiv 0 \pmod{\pi} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \end{cases} \quad \text{ou} : \exists k \in \mathbf{Z}, \begin{cases} \alpha &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} &= \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \end{cases} \quad \text{ou} : \exists k \in \mathbf{Z}, \begin{cases} \alpha &= 0 \\ \lambda &= \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2} \end{cases} \end{aligned}$$

Dans le cas où λ n'est pas de la forme $\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2}$ avec $k \in \mathbf{Z}$, on a nécessairement $\alpha = \beta = 0$, puis $f = 0$, et dans ce cas la seule solution de $u_K(f) = \lambda f$ est la solution nulle, donc λ n'est pas valeur propre. Il reste donc à considérer le cas où il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que : $\lambda = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2}$.

Soit $k \in \mathbf{Z}$, et posons : $\lambda_k = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2}$. Montrons que l'application :

$$f_{\lambda_k} : x \mapsto \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda_k}}\right) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)x\right)$$

est un vecteur propre de u_K pour la valeur propre λ_k . La résolution et les équivalences ci-dessus démontrent que $\lambda_k f_{\lambda_k}$ est solution du problème $(\mathcal{P})$. Or nous avons démontré que cette solution admet une unique solution : c'est $u_K(f_{\lambda_k})$. Donc, par unicité : $u_K(f_{\lambda_k}) = \lambda_k f_{\lambda_k}$. Or $f_{\lambda_k} \neq 0$, donc λ_k est bel et bien une valeur propre de u_K , un vecteur propre associé étant f_{λ_k} .

Nous avons donc démontré que les valeurs propres de u_K sont exactement les réels de la forme $\lambda_k = \frac{1}{(\frac{\pi}{2} + k\pi)^2}$ avec $k \in \mathbf{Z}$. On peut même se restreindre à $k \in \mathbf{N}$, du fait de la non injectivité de la fonction carré sur $\mathbf{R}$; en effet :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \lambda_k = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2} = \frac{1}{\left(-\frac{\pi}{2} - k\pi\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + (-k-1)\pi\right)^2} = \lambda_{-k-1},$$

Donc :

$$\{\lambda_\ell \mid \ell \in \mathbf{Z}, \ell \leq -1\} = \{\lambda_{-k-1} \mid k \in \mathbf{N}\} = \{\lambda_k \mid k \in \mathbf{N}\},$$

et finalement :

$$\{\lambda_\ell \mid \ell \in \mathbf{Z}\} = \{\lambda_\ell \mid \ell \in \mathbf{Z}, \ell \leq -1\} \cup \{\lambda_\ell \mid \ell \in \mathbf{N}\} = \{\lambda_k \mid k \in \mathbf{N}\} \cup \{\lambda_k \mid k \in \mathbf{N}\} = \{\lambda_k \mid k \in \mathbf{N}\}.$$

En conclusion, le spectre de u_K est $\{\lambda_k \mid k \in \mathbf{N}\} = \left\{ \frac{1}{(\frac{\pi}{2} + k\pi)^2} \mid k \in \mathbf{N} \right\}$, et pour tout $k \in \mathbf{N}$ le sous-espace propre de u_K associé à λ_k est :

$$\ker(u_K - \lambda_k \text{Id}_E) = \text{Vect}(f_{\lambda_k}),$$

car toute notre étude ci-dessus démontre qu'un vecteur propre associé à λ_k est nécessairement de la forme $x \mapsto \beta \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda_k}}\right) = \beta f_{\lambda_k}(x)$ avec $\beta \in \mathbf{R}$, donc est proportionnel à f_{λ_k} .

Notons que l'énoncé nous demande un vecteur propre *unitaire* associé à λ_k . Pour cela, il suffit de diviser f_k par sa norme. On a :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbf{N}, \quad \|f_k\|_2^2 &= \int_0^1 \left[\sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)x\right) \right]^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[1 - \cos\left(2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)x\right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{\pi + 2k\pi} \sin((\pi + 2k\pi)x) \right]_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, un vecteur propre unitaire engendrant le sous-espace propre de u_K associé à λ_k est :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad e_k = \frac{1}{\|f_k\|_2} f_k = \sqrt{2} f_k.$$

18. On a, d'après la relation admise dans l'énoncé :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^4} = \frac{1}{\pi^4} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + k\right)^4} = \frac{1}{6}.$$

Calculons à présent $\int_0^1 \int_0^1 (K(x, t))^2 dx dt$. On a d'abord :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \int_0^1 (K(x, t))^2 dx = \int_0^t x^2 dx + \int_t^1 t^2 dx = \frac{t^3}{3} + t^2(1 - t) = t^2 - \frac{2t^3}{3},$$

et ensuite :

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 (K(x, t))^2 dx \right) dt = \int_0^1 \left(t^2 - \frac{2t^3}{3} \right) dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{2t^4}{12} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

On a donc bien, comme attendu :

$$\int_0^1 \int_0^1 K(x, t)^2 dx dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k^2 = \frac{1}{6}.$$

19. Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $x \in [0, 1]$ on a $p_n(K_x) \perp K_x - p_n(K_x)$ car $p_n(K_x) \in F_n$ et $K_x - p_n(K_x) \in F_n^\perp$ par propriété d'une projection orthogonale. Par conséquent, d'après le théorème de Pythagore :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \|K_x - p_n(K_x)\|_2^2 + \|p_n(K_x)\|_2^2 = \|K_x\|_2^2.$$

Intégrons cette relation sur $[0, 1]$. On a :

$$\int_0^1 \|K_x - p_n(K_x)\|_2^2 dx = \int_0^1 \|K_x\|_2^2 dx - \int_0^1 \|p_n(K_x)\|_2^2 dx.$$

Explicitons le membre de droite. On a :

$$\int_0^1 \|K_x\|_2^2 dx = \int_0^1 \int_0^1 K(x, t)^2 dt dx,$$

et pour expliciter la seconde intégrale, rappelons qu'une base orthonormée de F_n est $(e_0, \dots, e_n)$ (en effet c'est une base de vecteurs propres associés à des valeurs propres toutes distinctes, donc d'après la question 14 ils sont orthogonaux deux à deux ; ils sont de plus unitaires par définition), donc :

$$\forall x \in [0, 1], \quad p_n(K_x) = \sum_{k=0}^n \langle K_x | e_k \rangle e_k = \sum_{k=0}^n u_K(e_k)(x) e_k = \sum_{k=0}^n \lambda_k e_k(x) e_k.$$

Dans une base orthonormée la norme euclidienne au carré se calcule en faisant la somme des coordonnées au carré, donc :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \|p_n(K_x)\|_2^2 = \sum_{k=0}^n \lambda_k^2 e_k(x)^2.$$

Par conséquent :

$$\int_0^1 \|p_n(K_x)\|_2^2 dx = \sum_{k=0}^n \lambda_k^2 \int_0^1 e_k(x)^2 dx = \sum_{k=0}^n \lambda_k^2 \|e_k\|_2^2 = \sum_{k=0}^n \lambda_k^2$$

parce que les e_k sont unitaires. En définitive, on a montré :

$$\int_0^1 \|K_x - p_n(K_x)\|_2^2 dx = \int_0^1 \int_0^1 K(x, t)^2 dt dx - \sum_{k=0}^n \lambda_k^2.$$

Or, d'après la question précédente :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \lambda_k^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k^2 = \int_0^1 \int_0^1 K(x, t)^2 dt dx$$

(les éléments différentiels n'étaient pas dans le même ordre, mais cela revient au même d'après le théorème de Fubini démontré dans la question 5), donc le membre de droite de l'égalité ci-dessus tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. On en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \|K_x - p_n(K_x)\|_2^2 dx = 0.$$

20. Soit $f \in E$, et soit $n \in \mathbf{N}$. Comme u_K est un endomorphisme symétrique, on a :

$$p_n(u_K(f)) = \sum_{k=0}^n \langle u_K(f) | e_k \rangle e_k = \sum_{k=0}^n \langle f | u_K(e_k) \rangle e_k = \sum_{k=0}^n \lambda_k \langle f | e_k \rangle e_k.$$

On peut donc réinterpréter le résultat à démontrer ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_K(f) - p_n(u_K(f))\|_2^2 = 0.$$

Or, si l'on raisonne comme dans le calcul de $p_n(K_x)$ de la question précédente, on montre que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad p_n(u_K(f))(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k e_k(x) \langle f | e_k \rangle = \sum_{k=0}^n u_K(e_k)(x) \langle f | e_k \rangle = \sum_{k=0}^n \langle K_x | e_k \rangle \langle f | e_k \rangle.$$

C'est l'expression, dans la base orthonormée $(e_0, \dots, e_n)$ de F_n , du produit scalaire de la fonction $p(K_x) = \sum_{k=0}^n \langle K_x | e_k \rangle e_k$ par $p(f) = \sum_{k=0}^n \langle f | e_k \rangle e_k$. C'est-à-dire :

$$\forall x \in [0, 1], \quad p_n(u_K(f))(x) = \langle p_n(K_x) | p_n(f) \rangle.$$

Or p_n est un projecteur orthogonal, donc un endomorphisme symétrique en particulier. On a donc :

$$\forall x \in [0, 1], \quad p_n(u_K(f))(x) = \langle p_n^2(K_x) | f \rangle = \langle p_n(K_x) | f \rangle.$$

On est à présent en mesure de faire le lien avec la question précédente :

$$\forall x \in [0, 1], \quad u_K(f)(x) - p_n(u_K(f))(x) = \langle K_x | f \rangle - \langle p_n(K_x) | f \rangle = \langle K_x - p_n(K_x) | f \rangle,$$

donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall x \in [0, 1], \quad (u_K(f)(x) - p_n(u_K(f))(x))^2 \leq \|K_x - p_n(K_x)\|_2^2 \cdot \|f\|_2^2.$$

On intègre cette inégalité sur $[0, 1]$. On a alors, par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \|u_K(f) - p_n(u_K(f))\|_2^2 = \int_0^1 (u_K(f)(x) - p_n(u_K(f))(x))^2 dx \leq \|f\|_2^2 \int_0^1 \|K_x - p_n(K_x)\|_2^2 dx.$$

Le majorant tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$ d'après la question précédente. Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_K(f) - p_n(u_K(f))\|_2^2 = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

21. Posons : $\forall k \in \mathbf{N}, \forall x \in I, g_k(x) = \lambda_k \langle e_k | f \rangle e_k(x)$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $x \in I$, on a :

$$|g_k(x)| = \lambda_k |\langle e_k | f \rangle| |e_k(x)| = \lambda_k |\langle e_k | f \rangle| \left| \sqrt{2} \sin \left(\left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) x \right) \right| \leq \sqrt{2} \lambda_k |\langle e_k | f \rangle|.$$

Cette majoration est indépendante de x . Donc, par propriété de la borne supérieure :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \|g_k\|_\infty \leq \sqrt{2} \lambda_k |\langle e_k | f \rangle|.$$

Montrons que la série $\sum_{k \geq 0} \sqrt{2} \lambda_k |\langle e_k | f \rangle|$ converge. Pour tout $k \in \mathbf{N}$ on a : $\lambda_k = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2}$, et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad |\langle e_k | f \rangle| \leq \|e_k\|_2 \cdot \|f\|_2 = \|f\|_2,$$

donc :

$$\forall k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad \sqrt{2} \lambda_k |\langle e_k | f \rangle| \leq \frac{\sqrt{2} \|f\|_2}{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2} \leq \frac{\sqrt{2} \|f\|_2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k^2}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{k \geq 1} \sqrt{2} \lambda_k |\langle e_k | f \rangle|$ converge également. Toujours d'après ce théorème de comparaison, on en déduit que la série $\sum_{k \geq 0} \|g_k\|_\infty$ converge.

On a donc démontré que la série $\sum_{k \geq 0} g_k = \sum_{k \geq 0} \lambda_k \langle e_k | f \rangle e_k$ converge normalement, donc uniformément, sur I . Notons g la somme de cette série : on nous demande de démontrer qu'elle est égale à $u_K(f)$. Pour cela, notons qu'on a $\left\| g - \sum_{k=0}^n \lambda_k \langle e_k | f \rangle e_k \right\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (c'est la définition de la convergence uniforme), mais aussi, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} \left\| g - \sum_{k=0}^n \lambda_k \langle e_k | f \rangle e_k \right\|_2 &= \sqrt{\int_0^1 \left(g - \sum_{k=0}^n \lambda_k \langle e_k | f \rangle e_k \right)^2} \leq \sqrt{\int_0^1 \left(\left\| g - \sum_{k=0}^n \lambda_k \langle e_k | f \rangle e_k \right\|_\infty \right)^2} \\ &= \left\| g - \sum_{k=0}^n \lambda_k \langle e_k | f \rangle e_k \right\|_\infty \sqrt{\int_0^1 1} \\ &= \left\| g - \sum_{k=0}^n \lambda_k \langle e_k | f \rangle e_k \right\|_\infty, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leq \left\| g - \sum_{k=0}^n \lambda_k \langle e_k | f \rangle e_k \right\|_2 \leq \left\| g - \sum_{k=0}^n \lambda_k \langle e_k | f \rangle e_k \right\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| g - \sum_{k=0}^n \lambda_k \langle e_k | f \rangle e_k \right\|_2 = 0.$$

Ceci montre que la suite $\left(\sum_{k=0}^n \lambda_k \langle e_k | f \rangle e_k \right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers g au sens de la norme $\| \cdot \|_2$, mais d'après la question précédente elle converge aussi vers $u_K(f)$ au sens de la norme $\| \cdot \|_2$. Par unicité de la limite, on a donc : $g = u_K(f)$, c'est-à-dire :

$$u_K(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \langle e_k | f \rangle e_k.$$

ce qu'il fallait démontrer.

22. Conformément à l'indication de l'énoncé, on pose pour tout $(x, y) \in I^2$:

$$K'(x, y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k e_k(x) e_k(y),$$

et nous allons montrer que $u_K = u_{K'}$. Soit $f \in E$. On a :

$$\forall x \in I, \quad u_{K'}(f)(x) = \int_0^1 K(x, t) f(t) dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k e_k(x) e_k(t) f(t) dt.$$

Soit $x \in I$. On a facilement, grâce à l'expression explicite des fonctions e_k , pour tout $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$:

$$\|\lambda_k e_k(x) e_k f\|_\infty \leq \frac{\sqrt{2} \|f\|_\infty}{\pi^2} \frac{1}{k^2}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge car son exposant est $2 > 1$, donc par comparaison la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} \lambda_k e_k(x) e_k f$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0, 1]$. Cela permet

d'intervertir somme et intégrale (les hypothèses de régularité étant clairement vérifiées : en effet les e_k et f sont continues) :

$$u_{K'}(f)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k e_k(x) \int_0^1 e_k(t) f(t) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k e_k(x) \langle e_k \mid f \rangle = u_K(f)(x),$$

et ceci vaut pour tout $x \in I$, donc : $u_{K'}(f) = u_K(f)$. Ceci vaut pour toute fonction $f \in E$, donc : $u_{K'} = u_K$. D'après la question 12, on peut conclure : $K = K'$. C'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad K(x, y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k e_k(x) e_k(y).$$

23. On a :

$$\int_0^1 K(x, x) dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k (e_k(x))^2 dx,$$

et en imitant le raisonnement de la question précédente on peut intervertir la somme et l'intégrale ; on obtient donc :

$$\int_0^1 K(x, x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \int_0^1 (e_k(x))^2 dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \|e_k\|_2^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k,$$

car les e_k sont unitaires : d'où la formule de la trace.

Or :

$$\int_0^1 K(x, x) dx = \int_0^1 \min(x, x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + k\right)^2},$$

donc la formule de la trace implique :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2} = \pi^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k = \pi^2 \int_0^1 K(x, x) dx = \frac{\pi^2}{2}.$$