D.S. n° 6 de mathématiques

Durée : 4 heures. Les calculatrices sont interdites.

Cet énoncé contient un exercice d'algèbre, un problème de probabilités et un problème d'analyse.

On attachera un grand soin à la rédaction. En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.

On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

Exercice : la factorisation QR (tiré de CCINP - 2022 - PSI - Math)

Soit un entier $n \geq 2$. L'ensemble des matrices réelles carrées de taille n est noté $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

L'ensemble $E_n = \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes est muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$: pour tous $X, Y \in E_n$,

$$\langle X, Y \rangle = X^T Y \quad \text{et} \quad \|X\|^2 = \langle X, X \rangle.$$

Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de l'espace vectoriel E_n.

Soit $V \in E_n \setminus \{0_{E_n}\}$.

1. Soit $P_V = \frac{1}{\|V\|^2} V V^T$. Montrer que l'endomorphisme $f_V : X \mapsto P_V X$ de E_n est un projecteur : sur quel sous-espace vectoriel ? par rapport à quel sous-espace vectoriel ?
2. La matrice $Q_V = \mathrm{I}_n - 2 \frac{1}{\|V\|^2} V V^T$ est appelée une matrice de Householder. Montrer que l'endomorphisme $g_V : X \mapsto Q_V X$ de E_n est une réflexion.
3. Soit $U \in E_n$ non colinéaire à V tel que $\|U\| = \|V\|$. Calculer $Q_{U-V} U$.
4. En déduire que, pour tous $U' \in E_n$ et $V' \in E_n \setminus \{0_{E_n}\}$, il existe une matrice orthogonale Q' telle que $Q'U'$ est colinéaire à V'.
5. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q', telle que $Q'A$ est de la forme :

$$Q'A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

6. Montrer que, pour tout $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, il existe une matrice Q orthogonale telle que QA est triangulaire supérieure.
7. Montrer que, pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice Q orthogonale telle que QA est triangulaire supérieure.
8. En déduire que, pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice Q orthogonale et une matrice R triangulaire supérieure telles que $A = QR$.

Problème 1 (tiré de CCP - 2018 - PSI - Math)

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé.
- Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $[-1, 1]$, que l'on suppose **centrée**, c'est-à-dire admettant une espérance égale à 0.
- On considère dans ce problème une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires *discrètes* sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *indépendantes et de même loi que* X. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

On cherche à montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers la variable constante nulle, c'est-à-dire que $P\Big(\Big\{\omega \in \Omega\,;\ \lim\limits_{n\to\infty} S_n(\omega) = 0\Big\}\Big) = 1$. Il s'agit d'un cas particulier de **la loi forte des grands nombres**.

1. **Majoration de $P(S_n \geq \varepsilon)$**
   (a) Soit Y une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que si Y est bornée, alors Y est d'espérance finie.
   (b) En déduire que, pour tout $t > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires e^{tX} et e^{tnS_n} admettent une espérance et prouver, par récurrence, que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t > 0, \quad E(\mathrm{e}^{tnS_n}) = (E(\mathrm{e}^{tX}))^n$$
   (c) Rappeler l'inégalité de Markov et ses hypothèses pour une variable aléatoire Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   (d) Montrer que, pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$P\big(S_n \geq \varepsilon\big) = P\big(\mathrm{e}^{tnS_n} \geq \mathrm{e}^{tn\varepsilon}\big) \leq \frac{\big(E\big(\mathrm{e}^{tX}\big)\big)^n}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}}$$

2. **Majoration de $E\big(\mathrm{e}^{tX}\big)$**
   (a) Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_a(x) = \frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x$$
   Montrer que la fonction g_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction g_a' est décroissante sur $\mathbb{R}$. En déduire, en remarquant que $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $g_a(x) \geq 0$.
   (b) En déduire que :
   $$\forall t > 0, \quad \forall x \in [-1, 1], \quad \mathrm{e}^{tx} \leq \frac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+x}{2}\mathrm{e}^{t}$$
   (c) En déduire que :
   $$\forall t > 0, \quad E\big(\mathrm{e}^{tX}\big) \leq \mathrm{ch}(t)$$
   (d) Montrer que :
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k$$
   En déduire que :
   $$\forall t > 0, \quad E\big(\mathrm{e}^{tX}\big) \leq \mathrm{e}^{t^2/2}$$

3. **Majoration de** $P(|S_n| \geq \varepsilon)$

   Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

   (a) Montrer que la fonction $\rho : t \longmapsto \mathrm{e}^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$ atteint un minimum en un point que l'on précisera.

   (b) En déduire que $P(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\varepsilon^2/2}$.

   (c) Montrer que $P(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2\mathrm{e}^{-n\varepsilon^2/2}$.

   (d) Pour n grand, cette dernière majoration est-elle meilleure que celle donnée par la loi faible des grands nombres ?

Problème 2 : les intégrales de Fresnel (tiré de CCINP - 2022 - MP - Math 1)

Soit H la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $H(x) = \displaystyle\int_0^x e^{it^2} \mathrm{d}t$, où e^{it^2} signifie $\exp\left(it^2\right)$.

1. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$ est convergente.
2. En déduire que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2} \mathrm{d}t$ converge.
3. Soit $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les modules des nombres complexes $e^{-x^2(t^2-i)}$ et $t^2 - i$.
4. Soient $\quad f(x,t) = \dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2 - i} \quad$ et $\quad g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\, \mathrm{d}t$.

   Montrer que la fonction g est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
5. Montrer que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.
6. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
7. On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$ converge et est égale à $\sqrt{\pi}$. Vérifier que, pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = -2\sqrt{\pi} e^{ix^2}.$$

8. On admet ensuite que :

$$\frac{1}{X^2 - i} = \frac{1-i}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2X - \sqrt{2}}{X^2 - X\sqrt{2} + 1} + \frac{i}{X^2 - X\sqrt{2} + 1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2X + \sqrt{2}}{X^2 + X\sqrt{2} + 1} + \frac{i}{X^2 + X\sqrt{2} + 1} \right).$$

   (a) Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} \mathrm{d}t$ est convergente et est égale à $\pi\sqrt{2}$.

   (b) Donner de même la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \mathrm{d}t$.

   (c) Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} - \frac{2t + \sqrt{2}}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} \right) \mathrm{d}t = 0$.
9. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$g(x) = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\pi}\, H(x).$$

10. En déduire les valeurs des intégrales de Fresnel $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(t^2\right) \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right) \mathrm{d}t$.