

D.S. N° 6 DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures. Les calculatrices sont interdites.

Cet énoncé contient un exercice d'algèbre, un problème de probabilités et un problème d'analyse.

On attachera un grand soin à la rédaction. En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.

On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

EXERCICE : la factorisation QR (tiré de CCINP - 2022 - PSI - MATH)

Soit un entier $n \geq 2$. L'ensemble des matrices réelles carrées de taille n est noté $M_n(\mathbb{R})$.

L'ensemble $E_n = M_{n,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes est muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$: pour tous $X, Y \in E_n$,

$$\langle X, Y \rangle = X^T Y \quad \text{et} \quad \|X\|^2 = \langle X, X \rangle.$$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de l'espace vectoriel E_n .

Soit $V \in E_n \setminus \{0_{E_n}\}$.

1. Soit $P_V = \frac{1}{\|V\|^2} VV^T$. Montrer que l'endomorphisme $f_V : X \mapsto P_V X$ de E_n est un projecteur : sur quel sous-espace vectoriel ? par rapport à quel sous-espace vectoriel ?
2. La matrice $Q_V = I_n - 2 \frac{1}{\|V\|^2} VV^T$ est appelée une matrice de Householder. Montrer que l'endomorphisme $g_V : X \mapsto Q_V X$ de E_n est une réflexion.
3. Soit $U \in E_n$ non colinéaire à V tel que $\|U\| = \|V\|$. Calculer $Q_{U-V} U$.
4. En déduire que, pour tous $U' \in E_n$ et $V' \in E_n \setminus \{0_{E_n}\}$, il existe une matrice orthogonale Q' telle que $Q' U'$ est colinéaire à V' .
5. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q' , telle que $Q' A$ est de la forme :

$$Q' A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } B \in M_{n-1}(\mathbb{R}).$$

6. Montrer que, pour tout $A \in M_2(\mathbb{R})$, il existe une matrice Q orthogonale telle que QA est triangulaire supérieure.
7. Montrer que, pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice Q orthogonale telle que QA est triangulaire supérieure.
8. En déduire que, pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice Q orthogonale et une matrice R triangulaire supérieure telles que $A = QR$.

PROBLÈME 1 : la loi forte des grands nombres (tiré de CCP - 2018 - PSI - MATH)

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé.
- Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $[-1, 1]$, que l'on suppose **centrée**, c'est-à-dire admettant une espérance égale à 0.
- On considère dans ce problème une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires *discrètes* sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *indépendantes et de même loi que X* . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

On cherche à montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers la variable constante nulle, c'est-à-dire que $P\left(\left\{\omega \in \Omega; \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega) = 0\right\}\right) = 1$. Il s'agit d'un cas particulier de **la loi forte des grands nombres**.

1. Majoration de $P(S_n \geq \varepsilon)$

- (a) Soit Y une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que si Y est bornée, alors Y est d'espérance finie.
- (b) En déduire que, pour tout $t > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires e^{tX} et e^{tnS_n} admettent une espérance et prouver, par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t > 0, \quad E(e^{tnS_n}) = (E(e^{tX}))^n$$

- (c) Rappeler l'inégalité de Markov et ses hypothèses pour une variable aléatoire Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- (d) Montrer que, pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(S_n \geq \varepsilon) = P(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}) \leq \frac{(E(e^{tX}))^n}{e^{tn\varepsilon}}$$

2. Majoration de $E(e^{tX})$

- (a) Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_a(x) = \frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x$$

Montrer que la fonction g_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction g'_a est décroissante sur $\mathbb{R}$. En déduire, en remarquant que $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $g_a(x) \geq 0$.

- (b) En déduire que :

$$\forall t > 0, \quad \forall x \in [-1, 1], \quad e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t$$

- (c) En déduire que :

$$\forall t > 0, \quad E(e^{tX}) \leq \cosh(t)$$

- (d) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^k$$

En déduire que :

$$\forall t > 0, \quad E(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}$$

3. Majoration de $P(|S_n| \geq \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

- (a) Montrer que la fonction $\rho : t \mapsto e^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$ atteint un minimum en un point que l'on précisera.
- (b) En déduire que $P(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\varepsilon^2/2}$.
- (c) Montrer que $P(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\varepsilon^2/2}$.
- (d) Pour n grand, cette dernière majoration est-elle meilleure que celle donnée par la loi faible des grands nombres ?

4. Conclusion

- (a) Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $P(|S_n| \geq \varepsilon)$ converge.
- (b) On fixe un réel $\varepsilon > 0$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n(\varepsilon) = \bigcup_{m \geq n} \{\omega \in \Omega \mid |S_m(\omega)| \geq \varepsilon\}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n(\varepsilon)$ est un événement et que $P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)\right) = 0$.

- (c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Posons :

$$\Omega_k = \left\{ \omega \in \Omega \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, \forall m \geq n, |S_m(\omega)| < \frac{1}{k} \right\}$$

Montrer que Ω_k est l'événement $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{B_n\left(\frac{1}{k}\right)}$ et en déduire $P(\Omega_k) = 1$.

- (d) Écrire l'ensemble $A = \left\{ \omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega) = 0 \right\}$ à l'aide des événements Ω_k , $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que A est un événement.
- (e) Déduire des questions précédentes que $P(A) = 1$.
On dit alors que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.
- (f) Soient $p \in]0, 1[$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p . Montrer que la suite $\left(\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} - p\right)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

PROBLÈME 2 : les intégrales de Fresnel (tiré de CCINP - 2022 - MP - MATH 1)

Soit H la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $H(x) = \int_0^x e^{it^2} dt$, où e^{it^2} signifie $\exp(it^2)$.

1. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$ est convergente.
2. En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$ converge.
3. Soit $(x, t) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les modules des nombres complexes $e^{-x^2(t^2-i)}$ et $t^2 - i$.
4. Soient $f(x, t) = \frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2 - i}$ et $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) dt$.
Montrer que la fonction g est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
5. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.
6. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
7. On admet que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge et est égale à $\sqrt{\pi}$. Vérifier que, pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = -2\sqrt{\pi}e^{ix^2}.$$

8. On admet ensuite que :

$$\frac{1}{X^2 - i} = \frac{1 - i}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2X - \sqrt{2}}{X^2 - X\sqrt{2} + 1} + \frac{i}{X^2 - X\sqrt{2} + 1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2X + \sqrt{2}}{X^2 + X\sqrt{2} + 1} + \frac{i}{X^2 + X\sqrt{2} + 1} \right).$$

(a) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} dt$ est convergente et est égale à $\pi\sqrt{2}$.

(b) Donner de même la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} dt$.

(c) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} - \frac{2t + \sqrt{2}}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} \right) dt = 0$.

9. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$g(x) = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\pi} H(x).$$

10. En déduire les valeurs des intégrales de Fresnel $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$ et $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$.