

CORRIGÉ DU D.S. N° 6 DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE : la factorisation QR (tiré de CCINP - 2022 - PSI - MATH)

Soit un entier $n \geq 2$. L'ensemble des matrices réelles carrées de taille n est noté $M_n(\mathbb{R})$.

L'ensemble $E_n = M_{n,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes est muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$: pour tous $X, Y \in E_n$,

$$\langle X, Y \rangle = X^T Y \quad \text{et} \quad \|X\|^2 = \langle X, X \rangle.$$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de l'espace vectoriel E_n .

Soit $V \in E_n \setminus \{0_{E_n}\}$.

1. Soit $P_V = \frac{1}{\|V\|^2} VV^T$. Montrer que l'endomorphisme $f_V : X \mapsto P_V X$ de E_n est un projecteur : sur quel sous-espace vectoriel ? par rapport à quel sous-espace vectoriel ?
2. La matrice $Q_V = I_n - 2 \frac{1}{\|V\|^2} VV^T$ est appelée une matrice de Householder. Montrer que l'endomorphisme $g_V : X \mapsto Q_V X$ de E_n est une réflexion.
3. Soit $U \in E_n$ non colinéaire à V tel que $\|U\| = \|V\|$. Calculer $Q_{U-V} U$.
4. En déduire que, pour tous $U' \in E_n$ et $V' \in E_n \setminus \{0_{E_n}\}$, il existe une matrice orthogonale Q' telle que $Q'U'$ est colinéaire à V' .
5. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q' , telle que $Q'A$ est de la forme :

$$Q'A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } B \in M_{n-1}(\mathbb{R}).$$

6. Montrer que, pour tout $A \in M_2(\mathbb{R})$, il existe une matrice Q orthogonale telle que QA est triangulaire supérieure.
7. Montrer que, pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice Q orthogonale telle que QA est triangulaire supérieure.
8. En déduire que, pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice Q orthogonale et une matrice R triangulaire supérieure telles que $A = QR$.

1. Le *sev* $D = \text{Vect}(V)$ est de dimension finie, d'où $E = D \oplus D^\perp$. Décomposons chaque vecteur $X \in E_n$ dans cette somme directe adaptée : il existe $(X_1, X_2) \in D \times D^\perp$ tel que $X = X_1 + X_2$. D'une part, $\exists \alpha \in \mathbb{R}, X_1 = \alpha V$. D'où $P_V X_1 = \frac{1}{\|V\|^2} (VV^T)(\alpha V) = \alpha \frac{1}{\|V\|^2} (VV^T)V = \alpha \frac{1}{\|V\|^2} V(V^T V) = \alpha V = X_1$. D'autre part, $P_V X_2 = \frac{1}{\|V\|^2} (VV^T)X_2 = \frac{1}{\|V\|^2} V(V^T X_2) = 0$ car $X_2 \perp V$.

Donc l'endomorphisme f_V est le projecteur sur la droite vectorielle $D = \text{Vect}(V)$ parallèlement à $D^\perp$.

2. D'après la question précédente, la matrice $S_V = 2P_V - I_n$ représente, dans la base canonique de E_n , la symétrie orthogonale par rapport à la droite D . Or $S_V = -Q_V$, d'où

l'endomorphisme g_V est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $D^\perp$. Donc q_V est une réflexion

▷ Définition XII.28.

3. De la question précédente, on déduit que

$$Q_{U-V}(U-V) = -(U-V) \quad \text{et} \quad Q_{U-V}(U+V) = U+V$$

car les vecteurs $U-V$ et $U+V$ sont orthogonaux. En effet, $\langle U-V, U+V \rangle = \|U\|^2 - \|V\|^2 = 0$.

Par linéarité,

$$Q_{U-V}U = V$$

car $U = \frac{1}{2}(U+V) + \frac{1}{2}(U-V)$.

4. Si les vecteurs U' et V' sont colinéaires, alors la matrice I_n convient. Sinon, on peut poser $U = \frac{1}{\|U'\|}U'$ et $V = \frac{1}{\|V'\|}V'$

car ni U' ni V' n'est nul. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et ont la même norme, qui vaut 1. De la question

précédente, on tire que $Q_{U-V}U = V$. Donc, en posant

$$Q' = Q_{U-V}$$

:

- $Q'U' = \frac{\|U'\|}{\|V'\|}V'$ est colinéaire à V' ;
 - la matrice Q' est orthogonale car elle représente une réflexion (donc une isométrie) dans la base canonique de E_n (donc une base orthonormée).
5. On pose U' la première colonne de la matrice carrée A et $V' = e_1$ qui est bien non nul. De la question précédente, on tire

une matrice orthogonale

Q' telle que : $\exists \alpha \in \mathbb{R}, Q'U' = \alpha V'$. La matrice carrée $Q'A$ est alors de la forme voulue.

6. Ici $n = 2$, le bloc B de la question précédente est donc de taille 1 et

la matrice $Q'A$ est donc triangulaire supérieure.

7. Par récurrence sur la taille $n \geq 2$:

- l'initialisation est réalisée par la question précédente ;
- on suppose la propriété vraie pour la taille $n-1$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On sait, d'après la question 5, qu'il existe

$Q' \in O_n(\mathbb{R})$ orthogonale telle que $Q'A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$. Par hypothèse de récurrence, il existe $Q'' \in O_{n-1}(\mathbb{R})$

telle que $Q''B$ est une matrice triangulaire supérieure R . La matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q'' \end{pmatrix} \cdot Q'$ est alors orthogonale (car c'est un produit de deux matrices orthogonales) et la matrice $QA = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

8. De la question précédente, on tire une matrice Q orthogonale et une matrice R triangulaire supérieure telles que $Q \cdot A = R$.

Donc

$$A = Q^T \cdot R$$

est le produit de la matrice Q^T , qui est orthogonale, et de la matrice triangulaire supérieure R .

PROBLÈME 1 : la loi forte des grands nombres (tiré de CCP - 2018 - PSI - MATH)

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé.
- Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $[-1, 1]$, que l'on suppose **centrée**, c'est-à-dire admettant une espérance égale à 0.
- On considère dans ce problème une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires *discrètes* sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *indépendantes et de même loi que X* . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

On cherche à montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers la variable constante nulle, c'est-à-dire que $P\left(\left\{\omega \in \Omega; \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega) = 0\right\}\right) = 1$. Il s'agit d'un cas particulier de **la loi forte des grands nombres**.

1. Majoration de $P(S_n \geq \varepsilon)$

- (a) Soit Y une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que si Y est bornée, alors Y est d'espérance finie.
- (b) En déduire que, pour tout $t > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires e^{tX} et e^{tnS_n} admettent une espérance et prouver, par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t > 0, \quad E(e^{tnS_n}) = (E(e^{tX}))^n$$

- (c) Rappeler l'inégalité de Markov et ses hypothèses pour une variable aléatoire Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- (d) Montrer que, pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(S_n \geq \varepsilon) = P(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}) \leq \frac{(E(e^{tX}))^n}{e^{tn\varepsilon}}$$

2. Majoration de $E(e^{tX})$

- (a) Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_a(x) = \frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x$$

Montrer que la fonction g_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction g'_a est décroissante sur $\mathbb{R}$. En déduire, en remarquant que $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $g_a(x) \geq 0$.

- (b) En déduire que :

$$\forall t > 0, \quad \forall x \in [-1, 1], \quad e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t$$

- (c) En déduire que :

$$\forall t > 0, \quad E(e^{tX}) \leq \text{ch}(t)$$

- (d) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^k$$

En déduire que :

$$\forall t > 0, \quad E(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}$$

3. Majoration de $P(|S_n| \geq \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

- (a) Montrer que la fonction $\rho : t \mapsto e^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$ atteint un minimum en un point que l'on précisera.
- (b) En déduire que $P(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\varepsilon^2/2}$.
- (c) Montrer que $P(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\varepsilon^2/2}$.
- (d) Pour n grand, cette dernière majoration est-elle meilleure que celle donnée par la loi faible des grands nombres ?

4. Conclusion

- (a) Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $P(|S_n| \geq \varepsilon)$ converge.
- (b) On fixe un réel $\varepsilon > 0$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n(\varepsilon) = \bigcup_{m \geq n} \{\omega \in \Omega \mid |S_m(\omega)| \geq \varepsilon\}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n(\varepsilon)$ est un événement et que $P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)\right) = 0$.

- (c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Posons :

$$\Omega_k = \left\{ \omega \in \Omega \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, \forall m \geq n, |S_m(\omega)| < \frac{1}{k} \right\}$$

Montrer que Ω_k est l'événement $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{B_n\left(\frac{1}{k}\right)}$ et en déduire $P(\Omega_k)$.

- (d) Écrire l'ensemble $A = \left\{ \omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega) = 0 \right\}$ à l'aide des événements Ω_k , $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que A est un événement.
- (e) Déduire des questions précédentes que $P(A) = 1$.
On dit alors que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.
- (f) Soient $p \in]0, 1[$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p . Montrer que la suite $\left(\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} - p\right)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

1. Majoration de $P(S_n \geq \varepsilon)$

- (a) La variable Y étant bornée, il existe $m \geq 0$ tel que, pour tout $y \in Y(\Omega)$, $|y| \leq m$ et donc $|yP(Y=y)| \leq mP(Y=y)$. Comme la série $\sum P(Y=y)$ est convergente (de somme égale à 1), la série $\sum yP(Y=y)$ est absolument convergente

par comparaison. Donc

Y est d'espérance finie

- (b) Soient $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

— Comme la variable aléatoire X est majorée par 1, la variable aléatoire e^{tX} est positive et majorée par e^t donc

bornée. Selon la question précédente,

la variable e^{tX} est alors d'espérance finie

— Comme $(nS_n)(\Omega) \subset [-n, n]$, la variable aléatoire e^{tnS_n} est positive et majorée par e^{tn} donc bornée. Toujours

selon la question précédente,

la variable e^{tnS_n} est d'espérance finie

- L'inégalité à prouver est vraie au rang 1. Supposons-la vraie à un rang $n-1$. D'une part, $e^{tnS_n} = e^{t(X_1+\dots+X_n)} = e^{t(X_1+\dots+X_{n-1})} \cdot e^{tX_n} = e^{t(n-1)S_{n-1}} \times e^{tX_n}$. D'autre part, comme les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, les variables $e^{t(n-1)S_{n-1}}$ et e^{tX_n} le sont aussi d'après le lemme des coalitions [▷ Proposition XIV.4](#). Par conséquent [▷ Théorème XIV.11](#) :

$$\forall t > 0, E(e^{tnS_n}) = E(e^{t(n-1)S_{n-1}}) \times E(e^{tX_n}) = (E(e^{tX}))^{n-1} \cdot E(e^{tX}).$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t > 0, E(e^{tnS_n}) = (E(e^{tX}))^n$.

(c) [▷ Lemme X.29](#)

Si la variable Y est à valeurs positives et admet une espérance, alors, pour tout $\alpha > 0$, $P(Y \geq \alpha) \leq \frac{E(Y)}{\alpha}$.

(d) Soient $t > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$.

Par stricte croissance de la fonction exponentielle, on a l'égalité des événements $(S_n \geq \varepsilon)$ et $(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon})$.

Comme la variable e^{tnS_n} est positive et d'espérance finie et $e^{tn\varepsilon} > 0$, l'inégalité de Markov donne alors :

$$P(S_n \geq \varepsilon) = P(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}) \leq \frac{(E(e^{tX}))^n}{e^{tn\varepsilon}}$$

2. Majoration de $E(e^{tX})$

(a) Soit $a > 1$. La fonction $g_a : x \mapsto \frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - e^{x \ln a}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'_a(x) = \frac{a - a^{-1}}{2} - \ln(a)a^x \quad \text{et} \quad g''_a(x) = -(\ln a)^2 a^x \leq 0$$

Ainsi, la fonction g'_a est décroissante sur $\mathbb{R}$. Comme $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, le [▷ théorème de Rolle](#) assure

l'existence d'un réel $c \in]-1, 1[$ tel que $g'_a(c) = 0$. La décroissance de g'_a entraîne alors que $g'_a \geq 0$ sur $] -\infty, c]$ et $g'_a(c) \leq 0$ sur $[c, +\infty[$. La fonction g_a est en particulier croissante sur $[-1, c]$ et décroissante sur $[c, 1]$, avec

$g_a(-1) = g_a(1) = 0$. Elle est donc positive sur $[-1, 1]$. On a donc bien, pour tout $x \in [-1, 1]$, $g_a(x) \geq 0$.

(b) Soit $t > 0$. On choisit $a = e^t > 1$ et on a alors $g_{e^t}(x) \geq 0$, pour tout $x \in [-1, 1]$ et donc $e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t$.

(c) Comme la variable X est à valeurs dans $[-1, 1]$, on a, selon la question précédente :

$$\forall t > 0, \quad e^{tX} \leq \frac{1-X}{2}e^{-t} + \frac{1+X}{2}e^t$$

Les variables aléatoires X et e^{tX} admettent une espérance donc, par linéarité et croissance de l'espérance, on en déduit :

$$E(e^{tX}) \leq \frac{1}{2}(e^{-t}(E(1) - E(X)) + e^t(E(1) + E(X))) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{puisque } X \text{ est centrée et } E(1) = 1.$$

Ainsi, pour tout $t > 0$, $E(e^{tX}) \leq \text{ch}(t)$.

(d) Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme $t^{2k} \geq 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il suffit de montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{(2k)!}{2^k k!} \geq 1$.

— Pour $k = 0$, on a $\frac{(2 \times 0)!}{2^0 0!} = 1 \geq 1$.

— Pour $k \geq 1$, on a $\frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{(k+1) \cdots (k+k)}{2^k} \geq \frac{\overbrace{2 \times \cdots \times 2}^{k \text{ termes}}}{2^k} = 1$.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{(2k)!}{2^k k!} \geq 1$ et donc,

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ et tout } t \in \mathbb{R}, \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

On reconnaît les termes généraux des séries de sommes $\text{ch}(t)$ et $e^{t^2/2}$, ce qui entraîne, en sommant cette inégalité pour $k = 0$ à $+\infty$, que $\text{ch}(t) \leq e^{t^2/2}$. À l'aide de la question précédente, on conclut par transitivité que,

$$\text{pour tout } t > 0, E(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}.$$

3. Majoration de $P(|S_n| \geq \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

- (a) La fonction $\exp$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, la fonction $\rho : t \mapsto e^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$ admet un minimum en un point t_0 si, et seulement si la fonction $t \mapsto -nt\varepsilon + nt^2/2$ admet un minimum en t_0 . L'étude de cette fonction (polynomiale du second degré) montre qu'elle est décroissante sur $] -\infty, \varepsilon]$ et croissante sur $[\varepsilon, +\infty[$, donc

$$\rho \text{ admet un minimum en } \varepsilon \text{ égal à } \rho(\varepsilon) = e^{-n\varepsilon^2/2}.$$

- (b) Avec la question 1-d et 2-d, on obtient :

$$P(S_n \geq \varepsilon) \leq \frac{(e^{t^2/2})^n}{e^{nt\varepsilon}} = e^{-nt\varepsilon + nt^2/2} = \rho(t)$$

La fonction ρ admet pour minorant $P(S_n \geq \varepsilon)$, donc son minimum $\rho(\varepsilon)$ est supérieur à $P(S_n \geq \varepsilon)$. Ainsi,

$$P(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\varepsilon^2/2}.$$

- (c) Les variables aléatoires $-X_i$ sont encore indépendantes, à valeurs dans $[-1, 1]$ et centrées ($E(-X_i) = -E(X_i) = 0$). Par conséquent, la variable aléatoire $-S_n$ vérifie aussi $P(-S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\varepsilon^2/2}$. Comme $(|S_n| \geq \varepsilon) = (S_n \geq \varepsilon) \cup (-S_n \geq \varepsilon) = (S_n \geq \varepsilon) \cup (S_n \leq -\varepsilon)$ et que l'union est disjointe, on obtient :

$$P(|S_n| \geq \varepsilon) = P(S_n \geq \varepsilon) + P(-S_n \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\varepsilon^2/2}$$

- (d) Les variables X_i sont indépendantes et de même loi, admettant une espérance 0 et une variance $V(X)$ selon la question 1-a. La loi faible des grands nombres [▶ Théorème XIV.16](#) donne alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - 0\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(X)}{n\varepsilon^2} \quad \text{i.e.} \quad P(|S_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{n\varepsilon^2}$$

Comme $n e^{-n\varepsilon^2/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ par croissance comparée, on a $2e^{-n\varepsilon^2/2} = \frac{o}{n \rightarrow \infty} \left(\frac{V(X)}{n\varepsilon^2}\right)$ et donc, pour n grand, la majoration obtenue à la question précédente est bien meilleure que celle fournie par la loi faible des grands nombres.

4. Conclusion

- (a) Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2 \left(e^{-\varepsilon^2/2}\right)^n$ et $|e^{-\varepsilon^2/2}| < 1$, puisque $\varepsilon^2/2 > 0$. Par comparaison

à une série géométrique convergente,

$$\text{la série de terme général } P(|S_n| \geq \varepsilon) \text{ converge}.$$

- (b) Soit $\varepsilon > 0$.

— En notant, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $A_m = (|S_m| \geq \varepsilon)$, on constate que les A_m sont des événements (des éléments de la tribu $\mathcal{A}$) et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n(\varepsilon)$ est une union dénombrable d'événements, donc

$$B_n(\varepsilon) \text{ est un événement}.$$

- La série de terme général $P(|S_n| \geq \varepsilon)$ étant convergente, son reste d'ordre $n - 1$ est bien défini et, par $\triangleright$ σ -sous-additivité (Proposition VI.13) :

$$0 \leq P(B_n(\varepsilon)) \leq \sum_{m=n}^{+\infty} P(|S_m| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Donc $P(B_n(\varepsilon)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ par le théorème des gendarmes.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $B_{n+1}(\varepsilon) = \bigcup_{m \geq n+1} A_m \subset \bigcup_{m \geq n} A_m = B_n(\varepsilon)$, ce qui signifie que la suite $(B_n(\varepsilon))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante (pour l'inclusion). Ainsi, par continuité décroissante $\triangleright$ Théorème VI.9 :

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n(\varepsilon)) = 0$$

(c) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} \omega \in \overline{\Omega_k} &\iff \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists m \geq n, |S_m(\omega)| \geq \frac{1}{k} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}^*, \omega \in \bigcup_{m \geq n} \left(|S_m| \geq \frac{1}{k}\right) = B_n\left(\frac{1}{k}\right) \\ &\iff \omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n\left(\frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $\overline{\Omega_k} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n\left(\frac{1}{k}\right)$ et donc

$$\Omega_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{B_n\left(\frac{1}{k}\right)}.$$

Comme $\varepsilon = \frac{1}{k} > 0$, la question précédente donne $P(\overline{\Omega_k}) = 0$ et donc

$$P(\Omega_k) = 1 - P(\overline{\Omega_k}) = 1 - 0 = 1.$$

(d) Soit $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} \omega \in A &\iff \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists n \in \mathbb{N}^*, \forall m \geq n, |S_m(\omega)| < \frac{1}{k} \\ &\iff \forall k \in \mathbb{N}^*, \omega \in \Omega_k \quad (\text{par définition de } \Omega_k) \\ &\iff \omega \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_k \end{aligned}$$

Ainsi, $A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_k$ est l'intersection dénombrable d'événements, donc un événement.

(e) On utilise à nouveau la continuité décroissante. Soit $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \left(|S_m| < \frac{1}{k+1}\right) &\subset \left(|S_m| < \frac{1}{k}\right) \quad \text{d'où} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \overline{B_n\left(\frac{1}{k+1}\right)} \subset \overline{B_n\left(\frac{1}{k}\right)} \\ &\text{d'où} \quad \Omega_{k+1} \subset \Omega_k \end{aligned}$$

La suite $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est alors décroissante et donc :

$$P(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(\Omega_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1$$

(f) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n^* = Y_n - p$. Par linéarité, les variables Y_n^* sont d'espérance finie égale à $E(Y_n^*) = p - p = 0$. Elles sont donc centrées et à valeurs dans $\{-p, 1-p\} \subset [-1, 1]$. Le résultat précédent montre que

$$\text{la suite de terme général } S_n^* = \frac{Y_1^* + \dots + Y_n^*}{n} = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} - p \text{ converge presque sûrement vers } 0.$$

PROBLÈME 2 : les intégrales de Fresnel (tiré de CCINP - 2022 - MP - MATH 1)

Soit H la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $H(x) = \int_0^x e^{it^2} dt$, où e^{it^2} signifie $\exp(it^2)$.

1. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$ est convergente.
2. En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$ converge.
3. Soit $(x, t) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les modules des nombres complexes $e^{-x^2(t^2-i)}$ et $t^2 - i$.
4. Soient $f(x, t) = \frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2 - i}$ et $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) dt$.
Montrer que la fonction g est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
5. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.
6. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
7. On admet que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge et est égale à $\sqrt{\pi}$. Vérifier que, pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = -2\sqrt{\pi}e^{ix^2}.$$

8. On admet ensuite que :

$$\frac{1}{X^2 - i} = \frac{1 - i}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2X - \sqrt{2}}{X^2 - X\sqrt{2} + 1} + \frac{i}{X^2 - X\sqrt{2} + 1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2X + \sqrt{2}}{X^2 + X\sqrt{2} + 1} + \frac{i}{X^2 + X\sqrt{2} + 1} \right).$$

- (a) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} dt$ est convergente et est égale à $\pi\sqrt{2}$.
- (b) Donner de même la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} dt$.
- (c) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} - \frac{2t + \sqrt{2}}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} \right) dt = 0$.

9. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$g(x) = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\pi}H(x).$$

10. En déduire les valeurs des intégrales de Fresnel $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$ et $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$.

1. Soit $x \geq \sqrt{2\pi}$. Les fonctions $u \mapsto \frac{1}{i}e^{iu}$ et $u \mapsto u^{-1/2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2\pi, x^2]$, on peut donc intégrer par parties :

$$\int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du = \left[\frac{e^{iu}}{i\sqrt{u}} \right]_{2\pi}^{x^2} - \int_{2\pi}^{x^2} \frac{-e^{iu}}{2iu^{3/2}} du = -\frac{i}{x}e^{ix^2} + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{2} \int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{u^{3/2}} du.$$

D'une part, $0 \leq \left| -\frac{i}{x}e^{ix^2} \right| = \frac{1}{x}$, d'où $-\frac{i}{x}e^{ix^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ d'après la théorème des gendarmes. D'autre part, $\left| \frac{e^{iu}}{u^{3/2}} \right| = \frac{1}{u^{3/2}}$

donc, par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente sur $[2\pi; +\infty[$, l'intégrale $\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^{3/2}} du$ converge

absolument. Donc $\int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4} \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^{3/2}} du$.

2. D'un côté, l'intégrale $\int_0^{\sqrt{2\pi}} e^{it^2} dt$ n'est même pas impropre. De l'autre, le changement de variable $t = \sqrt{u}$ est $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, donc l'intégrale impropre $\int_{\sqrt{2\pi}}^{+\infty} e^{it^2} dt$ est de même nature que $\frac{1}{2} \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$, c'est-à-dire convergente d'après la question précédente.

3. $e^{-x^2(t^2-i)} = e^{-x^2t^2} \cdot e^{-ix^2}$. D'une part, le réel $e^{-x^2t^2}$ est positif. D'autre part, le complexe e^{-ix^2} est de module 1. Donc

$$|e^{-x^2(t^2-i)}| = |e^{-x^2t^2}| \cdot |e^{-ix^2}| = e^{-x^2t^2}.$$

De plus,

$$|t^2 - i| = \sqrt{(t^2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{t^4 + 1}.$$

4. Soient $X = [0, +\infty[$ et $T = \mathbb{R}$:

- pour tout $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur X ;
- pour tout $x \in X$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur T ;
- soit $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$. Pour tout $(x, t) \in X \times T$, $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ d'après la q. précédente et l'intégrale $\int_T \varphi(t) dt$ converge car $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ et $\varphi(t) \underset{-\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$.

Donc la fonction g est continue sur $[0, +\infty[$.

5. On va utiliser le théorème de la convergence dominée avec la même fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$.

Soient (u_n) une suite de réels tendant vers $+\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $h_n(t) = |f(u_n, t)|$.

- La suite des fonctions h_n converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction *cpm* car $h_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|h_n(t)| \leq \varphi(t)$ et l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt$ converge.

Donc les fonctions h_n et h sont intégrables et on peut intervertir limite et intégrale : $\int_{\mathbb{R}} h_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} h(t) dt$.

Autrement dit, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f(u_n, t)| dt = 0$. C'est vrai pour toute suite (u_n) tendant vers $+\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x, t)| dt = 0$ d'après la caractérisation séquentielle de la limite.

Enfin, $0 \leq \left| \int_{\mathbb{R}} f(x, t) dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x, t)| dt$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x, t) dt = 0$$

d'après le théorème des gendarmes.

6. Soient $b \geq a > 0$, $X = [a, b]$ et $T = \mathbb{R}$.

- Pour tout $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X
- Pour tout $x \in X$, $\begin{cases} \text{la fonction } t \mapsto f(x, t) \text{ est cpm et intégrable sur } T \\ \text{la fonction } t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-x^2(t^2-i)} \text{ est cpm sur } T \end{cases}$
- Pour tout $(x, t) \in X \times T$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$, où $\varphi(t) = 2be^{-a^2t^2}$ et l'intégrale $\int_T \varphi(t) dt$ converge car $\varphi(t) \underset{t \rightarrow \pm\infty}{\sim} \left(\frac{1}{t^2} \right)$.

La fonction g est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Ceci est vrai pour tous réels $b \geq a > 0$, donc

g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

7. Le même théorème de dérivation sous le signe intégral conclut aussi que

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = -2x \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2(t^2-i)} dt$$

Donc, après le changement de variable $u = xt$ qui est bien $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone car $x > 0$:

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = -2e^{ix^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = -2\sqrt{\pi} e^{ix^2}.$$

8. (a) L'intégrale est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$. Elle est convergente car $\frac{1}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} \underset{t \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$. Et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} du \quad \text{en posant le } CDV \quad u = t - \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ qui est } \mathcal{C}^1 \text{ et strictement monotone} \\ &= \left[\sqrt{2} \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}u) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

- (b) De même (par le changement de variable $u = -t$) : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} du = \pi\sqrt{2}$.

- (c) (On se garde de calculer les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t + \sqrt{2}}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} dt$ qui sont divergentes. On lève cette forme indéterminée :))

$$\begin{aligned} J &= \int_A^B \frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} - \frac{2t + \sqrt{2}}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} dt \\ &= \left[\ln(t^2 - \sqrt{2}t + 1) - \ln(t^2 + \sqrt{2}t + 1) \right]_A^B \\ &= \left[\ln \left(\frac{t^2 - \sqrt{2}t + 1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \right) \right]_A^B \end{aligned}$$

$$\int_A^B \left(\frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} - \frac{2t + \sqrt{2}}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \right) dt = \left[\ln(t^2 - \sqrt{2}t + 1) - \ln(t^2 + \sqrt{2}t + 1) \right]_A^B = \left[\ln \left(\frac{t^2 - \sqrt{2}t + 1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \right) \right]_A^B$$

a pour limite 0 quand $A \rightarrow -\infty$ et $B \rightarrow +\infty$. Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} - \frac{2t + \sqrt{2}}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \right) dt = 0.$$

9. Soient $x \leq a > 0$. La fonction g' est continue sur le segment $[a, x]$ d'après la q. 6. D'où

$$g(x) - g(a) = \int_a^x g'(t) dt = -2\sqrt{\pi}(H(x) - H(a))$$

d'après la q. 7. Cette égalité passe à la limite $a \rightarrow 0$ car la fonction g est continue en 0 d'après la q. 4 et la fonction H est continue en 0 car elle est définie comme une primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$. D'où $g(x) - g(0) = 2\sqrt{\pi}(H(x) - H(0))$. D'un côté $H(0) = 0$, de l'autre :

$$\begin{aligned} g(0) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{t^2 - i} \\ &= \frac{1-i}{4} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} - \frac{2t + \sqrt{2}}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} dt + i\pi\sqrt{2} + i\pi\sqrt{2} \right) \\ &= \frac{1-i}{4} \times (0 + 2i\pi\sqrt{2}) = (1+i) \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Donc

$$g(x) = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\pi}H(x).$$

10. L'égalité de la q. précédente passe à la limite $x \rightarrow +\infty$ d'après les q. 5 et 2. D'où $0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\pi - 2\sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$ et la

valeur des intégrales de Fresnel :

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$