Colle n° 20

Couples de v.a. & séries de matrices

Exercice 1. On réalise une suite d'épreuves de Bernoulli (Succès ou Echec) indépendantes. La probabilité de chaque succès est $p \in]0,1[$ et celle de chaque échec est $q = 1-p$. On appelle « run » de longueur $k \in \mathbb{N}^*$ une suite de k résultats identiques consécutifs interrompue par un résultat contraire. Soient X la longueur du premier « run » et Y la longueur du deuxième.

Par exemple, si le résultat est $SSSSES\cdots$, alors le premier « run » est $SSSS$ et sa longueur est 4 ; le deuxième « run » est E et sa longueur est 1.

1. Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Calculer $P(X=a, Y=b)$ et en déduire que
$$P(X=a) = p^a q + q^a p \quad \text{et} \quad P(Y=b) = p^{b-1}q^2 + q^{b-1}p^2.$$
2. Montrer que, si $p = \frac{1}{2}$, alors les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
3. Montrer que X et Y sont d'espérance finie, que $E(X) = \dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{p}$ et que $E(Y) = 2$.

Exercice 2. Soient un entier $p \in \mathbb{N}^*$, une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et la suite des matrices $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$.

1. Justifier que le déterminant $\det : \mathscr{M}_p(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une application continue et que, à partir d'un certain rang n, la matrice S_n est inversible.
2. Montrer que $\left(I_p + \frac{A}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^A$.

   (On pourra choisir une norme sous-multiplicative et étudier la suite des réels $\left\| S_n - \left(I_p + \dfrac{A}{n}\right)^n \right\|$. Mêmes idées que dans les exercices ▷ **XI.46 & TD9.10**.)