# Thème n$^{\text{o}}$ 4

*Produits scalaires*

16 mars 2025

---

Objectif : Réviser les produits scalaires et projections orthogonales ▷ **VIII**, les endomorphismes autoadjoints et isométries vectorielles ▷ **XII**, et même la hessienne ▷ **XV**.

---

**A** • L'**inégalité de Cauchy-Schwarz** est :

— vraie sur tout $\mathbb{R}-ev$ de dimension finie ou infinie muni d'un produit scalaire, *i.e.* d'une forme $\boxed{\text{B}}\boxed{\text{S}}\boxed{\text{D}}\boxed{\text{P}}$.

— encore vraie si la forme est $\boxed{\text{B}}\boxed{\text{S}}\boxed{\text{P}}$ mais $\boxed{\cancel{\text{D}}}$. Ça sert dans $L_2$ ▷ **VIII.7.3**, ça sert aussi pour la covariance ▷ **XIV.9**. Le théorème de Pythagore ▷ **VIII.12** aussi a son analogue en proba ▷ **XIV.13** (l'hyptothèse « vecteurs $\perp$ deux à deux » est remplacée par « v.a. $\perp\!\!\!\perp$ deux à deux »).

— une égalité *ssi* les vecteurs sont colinéaires (à noter que cette propriété utilise l'hypothèse $\boxed{\text{D}}$).

— utile dans les exercices ▷ **Colle11.1 & TD13.15** pour mq les fonctions $\zeta$ de Riemann et $\Gamma$ d'Euler sont log-convexes. Utile aussi pour mq tout produit scalaire est une application continue, même sur un *ev* de dimension infinie ▷ **XI.41&42**. Utile encore pour mq $h^T Ah = o(h)$ ▷ **TD15.8**.

**B** • Le caractère défini $\boxed{\text{D}}$ d'un produit scalaire peut être :

— utile pour prouver qu'un vecteur est nul. Cela permet de mq les matrices carrées $A$ et $A^T A$ ont le même noyau ▷ **TD2.10q.3 & Colle12.2q.2c**, de mq toute isométrie est linéaire d'une part, injective d'autre part ▷ **XII.8**, de mq un endomorphisme normal a les mêmes valeurs propres et vecteurs propres que son adjoint ▷ **TD 12.11 & oralCCINP63**.

— délicat à prouver. Se rappeler le « théorème de l'intégrale nulle » ($\int_I f(t)\,dt = 0 \implies \forall t \in I, f(t) = 0$ <u>si</u> la fonction $f$ est continue et ne change pas de signe). Et qu'un polynôme est nul si le nombre de ses racines est strictement supérieur à son degré ▷ **VIII.5**.

**C** • Réviser les **projections orthogonales**.

Savoir calculer la matrice $M$, dans une base $\mathcal{B}$, d'une projection orthogonale ▷ **VIII.22** sans oublier, avant d'appliquer la formule de la projection orthogonale ▷ **VIII.21**, d'orthonormaliser la base du *sev* $F$ sur lequel on projette grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt.

Ne pas oublier de vérifier, pour éprouver le résultat du calcul, que : $M^2 = M$, $\text{tr}M = \dim F$ ▷ **II.11** et, si la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, $M^T = M$ ▷ **XII.13**.

**Exercice 10** (Centrale-Supélec Maths 2 PSI 2011).

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, $J = ZZ^T \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ et $P = I_n - \frac{1}{n}J \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. On munit $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle X, Y \rangle = X^T Y$ et $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(M \mid N) = \mathrm{Tr}(M^T N)$.

1. Soit $\pi$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ représenté dans la base canonique par la matrice $P$.
   (a) Montrer que $\pi$ est un projecteur.
   (b) Montrer que $\mathrm{Vect}(Z) \subset \mathrm{Ker}(\pi)$ et $\mathrm{Vect}(Z)^\perp \subset \mathrm{Im}(\pi)$.
   En déduire le noyau et l'image de $\pi$.
   Le projecteur $\pi$ est-il une projection orthogonale ?

2. On considère l'endomorphisme $\Phi$ de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}), \quad \Phi(M) = PMP.$$

   (a) Montrer que $\Phi$ est un projecteur.
   (b) Montrer que $\Phi$ est un endomorphisme autoadjoint.
   Est-ce une projection orthogonale ?
   (c) Montrer que :

$$\mathrm{Im}(\Phi) = \{M \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \mid \ MZ = M^T Z = 0\}.$$

---

**D** • Si $F$ est un *sev* d'un espace préhilbertien $E$, alors : d'une part $F$ et $F^\perp$ sont en somme directe, d'autre part $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$ ▷ **VIII.17**. Si, de plus, le *sev* $F$ est de dimension finie (et même si l'*ev* $E$ est de dimension infinie), alors : d'une part $F$ et $F^\perp$ sont supplémentaires et cela implique que, d'autre part $F = \left(F^\perp\right)^\perp$ ▷ **VIII.23 et sa preuve**.

Il arrive que $F \neq \left(F^\perp\right)^\perp$ et que, par suite, $F$ et $F^\perp$ ne soient pas supplémentaires ▷ **TD 8.6**.

**E** • Le **théorème des moindres carrés** ▷ **VIII.24&25** permet de définir et de calculer la distance $d(x, F)$ entre un vecteur $x \in E$ et un *sev* $F$ de dimension finie d'un espace préhilbertien $E$.

À noter que cette distance est un cas particulier de la distance $d(x, A)$ entre un vecteur $x$ et une partie $A$ non vide d'un *evn* $E$ ▷ **TD 11.13**. Cette dernière est un *inf* (pas nécessairement atteint ▷ **Colle 17.3**, dont le corrigé utilise le « théorème de l'intégrale nulle ») tandis que la première est un *min* (global et atteint en un unique vecteur : le projeté orthogonal de $x$ sur $F$).

**F** • Le **théorème de représentation de Riesz** ▷ **VIII.29** est vrai en dimension finie, parfois faux en dimension infinie ▷ **TD 8.7**. Il permet de définir l'adjoint ▷ **XII.14**, le gradient ▷ **XV.17** et le produit vectoriel ▷ **TD12.12**.

**G** • Reconnaître une **isométrie vectorielle** ou un **endomorphisme autoadjoint** grâce à sa matrice dans une *bon* ▷ **XII.10&12**. Ou sans la matrice ▷ **XII.9&11**. Reconnaître qu'une matrice symétrique est positive voire définie positive ▷ **XII.23** grâce à son spectre ▷ **XII.24**.

**Exercice 11** (Centrale-Supélec Maths 2 MP 2011)**.**
Pour $n \in \mathbb{N}^*, A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $i \in [\![1,n]\!]$, on note $A^{(i)}$ la matrice carrée d'ordre $i$ extraite de $A$, constituée par les $i$ premières lignes et les $i$ premières colonnes de $A$. On dira que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $\mathcal{P}_n$ si $\det(A^{(i)}) > 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. On veut démontrer l'équivalence suivante :

$$A \text{ est définie positive} \iff A \text{ vérifie } \mathcal{P}_n.$$

1. On suppose que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est définie positive. Montrer que $A$ vérifie la propriété $\mathcal{P}_n$.
2. Dans les cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$, montrer directement que toute matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}_n$ est définie positive.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que toute matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}_n$ est définie positive. On considère une matrice $A$ de $\mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ et on suppose par l'absurde que $A$ n'est pas définie positive.
   (a) Montrer alors que $A$ admet deux vecteurs propres linéairement indépendants associés à des valeurs propres (non nécessairement distinctes) strictement négatives.
   (b) En déduire qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ dont la dernière composante est nulle et tel que $X^T AX < 0$. Conclure.
4. Soit $A$ une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. A-t-on l'équivalence suivante :

$$A \text{ est positive} \iff \forall i \in [\![1,n]\!], \det(A^{(i)}) \geqslant 0 \text{ ?}$$

---

**H** • Pour explorer le lien entre matrices symétriques et calcul différentiel, réviser la hessienne ▷ **XV.39&40**. Et le quotient de Rayleigh ▷ **TD8.2** :

**Exercice 12.** Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$, une matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $f$ la fonction définie, pour tout vecteur colonne de l'ouvert $U = \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, par

$$f(X) = \frac{X^T AX}{X^T X} = \frac{\langle X, AX\rangle}{\|X\|^2}$$

en notant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|$ la norme associée.

1. Montrer que la fonction $f$ est bornée et atteint ses bornes.
2. Montrer que la fonction $f$ est différentiable sur $U$ et que, pour tout $X \in U$,

$$\nabla f(X) = 2\,\frac{\|X\|^2 AX - \langle AX, X\rangle X}{\|X\|^4}.$$

3. En déduire que $X$ est un point critique de la fonction $f$ *ssi* $X$ est un vecteur propre de la matrice $A$.

---

En ligne sur le Cahier de Prépa : vous pouvez vous faire peur en explorant le sujet Mines-Ponts Maths 2 PSI 2021 non sans vous aider du corrigé.