

Colle 20 Variables aléatoires, séries

OLLIVIER Louise

Exercice 1.

1. Démontrer que la famille $\left(\frac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe du couple (X, Y) vérifie :
pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $P(X = i, Y = j) = P[(X = i) \cap (Y = j)] = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}$.
 - (a) Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi conjointe.
 - (b) Démontrer que les variables aléatoires X et Y suivent une même loi.
 - (c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution 1.

1. Notons $u_{i,j} = \frac{i+j}{2^{i+j}}$ pour tout couple $(i,j) \in \mathbb{N}^2$.

On a : - $u_{i,j} = u_{j,i} \geq 0$ pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$; - pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{j \geq 0} u_{i,j}$ converge. En effet, on a (sous réserve de convergence de chacune des séries utilisées) :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i}{2^{i+j}} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j}{2^{i+j}} = \frac{i}{2^i} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^i} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j}{2^j}$$

et on reconnaît là des séries convergentes. Au passage, on obtient $\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = \frac{i+1}{2^{i-1}} = 4u_{i,1}$ (en utilisant les calculs du préambule) ; - la série $\sum_{i \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} \right)$ converge, car pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = 4u_{i,1}$ par ce qui précède et parce que $\sum_{i \geq 0} u_{i,1}$ converge (et elle a même somme que $\sum_{i \geq 0} u_{1,i}$ par symétrie). On obtient concrètement : $\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} \right) = \sum_{i=0}^{+\infty} 4u_{i,1} = 4 \sum_{i=0}^{+\infty} u_{1,i} = 4 \times 4 \times u_{1,1} = 16u_{1,1}$. On en déduit, par le théorème de sommation par paquets pour les familles à termes positifs, que la famille $(u_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable, et sa somme vaut :

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} \right) = 16 \times u_{1,1} = \frac{16 \times 2}{2^2} = 8$$

2. (a) Les relations données définissent bien une loi de probabilité sur l'univers dénombrable $\mathbb{N}^2$, puisque : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \frac{i+j}{2^{i+j+3}} = \frac{u_{i,j}}{8} \geq 0$; et $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{i+j}{2^{i+j+3}} = \frac{1}{8} \underbrace{\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} u_{i,j}}_{=8} = 1$.

(b) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a la décomposition d'événement :

$$(X = i) = \bigcup_{j=0}^{+\infty} ((X = i) \cap (Y = j)),$$

et cette réunion est disjointe, donc

$$P(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j)) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{u_{i,j}}{8}.$$

De même, on a

$$P(Y = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P((X = j) \cap (Y = i)) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{u_{j,i}}{8} = P(X = i),$$

puisque $u_{i,j} = u_{j,i}$. Les variables aléatoires X et Y suivent donc la même loi, donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = P(Y = k) = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{u_{k,l}}{8} = \frac{4u_{k,1}}{8} = \frac{1}{2} u_{k,1} = \frac{k+1}{2^{k+2}}$$

(c) On a d'après l'énoncé :

$$P((X = 0) \cap (Y = 0)) = \frac{0+0}{2^{0+0+3}} = 0$$

Pourtant $P(X = 0) \times P(Y = 0) = \frac{0+1}{2^{1+2}} \times \frac{0+1}{2^{1+2}} = \frac{1}{16} \neq P((X = 0) \cap (Y = 0))$, donc les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

BROUILLET Tom

Exercice 2. Soient Ω un univers fini muni d'une probabilité P . Si X est une variable aléatoire réelle, on dit que X est symétrique si X et $-X$ suivent la même loi.

1. Soient Y et Y' deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi. Montrer que $Y - Y'$ est symétrique.
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On pose $f_X : t \mapsto E(e^{itX})$. Montrer que f_X détermine entièrement la loi de X . Si X est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, donner une condition nécessaire et suffisante sur f_X pour que X soit symétrique.

Solution 2.

1. Notons $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\} = Y'(\Omega)$. Comme Y et Y' sont indépendantes,

$$\mathbf{P}(Y - Y' = z_k) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(Y' = y_i) \mathbf{P}(Y = z_k + y_i)$$

Comme Y et Y' ont même loi,

$$\mathbf{P}(Y - Y' = z_k) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(Y = y_i) \mathbf{P}(Y' = z_k + y_i) = \mathbf{P}(Y' - Y = z_k)$$

donc $Y - Y'$ est symétrique.

2. Si $X(\Omega) = \mathbf{Z}$, comme $|e^{itk} \mathbf{P}(X = k)| = \mathbf{P}(X = k)$ et comme

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = 1$$

la famille $(e^{itk} \mathbf{P}(X = k))_{k \in \mathbf{Z}}$ est sommable. La fonction

$$f_X : t \mapsto E(e^{itX}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{itk} \mathbf{P}(X = k)$$

est définie sur $\mathbb{R}$. Montrons que, pour tout $k \in \mathbf{Z}$:

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_X(t) e^{-ikt} dt$$

et l'on pourra dire que la fonction f_X détermine entièrement la loi de X . La série de fonctions $\sum u_k$ où $u_n(t) = e^{it(n-k)} \mathbf{P}(X = n)$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$. On déduit du théorème d'intégration des séries de fonctions continues sur un segment :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_X(t) e^{-ikt} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t} dt = \mathbf{P}(X = k)$$

Si X est symétrique, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(X = -k)$ d'où, pour $t \in \mathbf{R}$:

$$f_X(t) = \mathbf{P}(X = 0) + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) \cos(kt).$$

La fonction f_X est paire.

Réciproquement, si f_X est paire,

$$\forall k \in \mathbf{Z}, \quad \mathbf{P}(X = -k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_X(t) e^{ikt} dt$$

car $t \mapsto f_X(t) e^{ikt}$ est 2π -périodique. Le changement de variable $u = -t$ donne : $\mathbf{P}(X = -k) = \mathbf{P}(X = k)$ et X est symétrique.

HOUEL Cyprien

Exercice 3. On appelle sous groupe à un paramètre de $GL_n(\mathbb{R})$ une application continue $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t).$$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ une telle application.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $F : \mathbb{R} \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, F'(t) = AF(t) \text{ et } F(0) = I_n.$$

Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F(t) = \exp(tA)$.

2. Que vaut $\varphi(0)$? On suppose que φ est de classe $\mathcal{C}^1$. Démontrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = \varphi'(0)\varphi(t).$$

En déduire tous les sous-groupes à un paramètre de classe $\mathcal{C}^1$.

3. On revient au cas général et on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi(t) = \int_0^t \varphi(u) du.$$

- (a) Démontrer que

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \psi(s+t) = \psi(s) + \varphi(s)\psi(t).$$

- (b) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $t \in]0, r[$, $\psi(t)$ est inversible.

- (c) Conclure.

4. On suppose dans cette question que φ est à valeurs dans $SL_2(\mathbb{R})$ (le sous-groupe des matrices de déterminant 1). Soit $x \in \mathbb{R}^2$ un vecteur non nul.

Étudier géométriquement l'orbite $\{\varphi(t)x \mid t \in \mathbb{R}\}$ (soit un point, soit une demi-droite, soit une droite, soit une ellipse, soit un arc d'hyperbole).

Solution 3.

1. On multiplie par $\exp tA$ et on obtient que $(F(t)\exp(-tA))' = 0$ donc chacune des composantes est constantes, et avec $F(0) = I_n$, la solution est bien unique.
2. On a $\varphi(0) = I_n$. et si φ est de classe $\mathcal{C}^1$, on a

$$\frac{\partial}{\partial s}\varphi(s+t) = \varphi'(s)\varphi(t)$$

et en $t = 0$, on obtien : $\varphi'(t) = \varphi'(0)\varphi(t)$. La question 1/ montre que $\varphi(t) = \exp(tA)$.

3. (a)

$$\varphi(s+t) = \int_0^s \varphi(t) dt + \int_s^{s+t} \varphi(t) dt$$

et le changement de variable affine $u = t - s$ donne le résultat.

- (b) Pour l'inversibilité, utiliser un dl à l'ordre n de $\det \psi$: On a par définition $\psi(0) = 0$ et $\psi'(0) = \varphi(0) = I_n$: donc $\psi(t) = tI_n + o(t)$.
 - (c) Si ψ est inversible, alors $\varphi(s)$ s'exprime en fonction de ψ et ψ^{-1} et donc est de classe $\mathcal{C}^1$. On en déduit qu'au voisinage de 0, φ s'écrit encore comme $t \mapsto \exp(tA)$.
4. Notons que $t \mapsto \exp(tA)$ vérifie $\text{tr} A = 0$. Si A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, trigonalisable dans $\mathbb{R}$ ou encore digonalisable dans $\mathbb{C}$ de valeurs propres conjuguées, on trouve les différents cas.