

Corrigé du

KDO

07/03/25

Merci à
Arthur
Luli.

Exercice 2

$$1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \left| \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ est impropre en $+\infty$

or $\frac{1}{1+t^2} \sim \frac{1}{t^2}$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est positive et

intégrable sur $[1, +\infty[$ d'après le critère de Riemann en $+\infty$.

D'où l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge

D'où l'intégrale $F(x)$ est absolument convergente pour tout réel x ✓

$$2) \quad F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(0)}{1+t^2} dt = 0 \quad \text{car } \operatorname{Arctan}(0) = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} F(1) &= \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{1+t^2} dt = \left[\frac{1}{2} \operatorname{Arctan}^2(t) \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi^2}{8} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(-xt)}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{-\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2} dt \quad \text{car la fonction} \\ &\quad \operatorname{Arctan} \text{ est impaire} \\ &= -F(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

3) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \leq y$

D'où $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\arctan(xt) \leq \arctan(yt)$ car $xt \leq yt$
 et par croissance de la fonction $\arctan$
 car $x - t > 0$

D'où $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\frac{\arctan(xt)}{1+t^2} \leq \frac{\arctan(yt)}{1+t^2}$

Donc par croissance de l'intégrale

$$F(x) \leq F(y)$$

D'où F est croissante sur $\mathbb{R}$
 la fonction

4) Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{1+t^2}$$

et la fonction $t \mapsto \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$

De plus $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\left| \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$

et la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

D'où d'après le théorème de la convergence dominée

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} F(0) = \frac{\pi^2}{4}$$

Soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi^2}{4}$

5) Soient $X = \mathbb{R}$ et $T = [0, +\infty[$

$\forall x \in X, \forall t \in T$, on pose $f(x, t) = \text{Arctan}(xt) + \frac{1}{1+t^2}$

- Pour chaque $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur X
- Pour chaque $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur T
- Pour chaque $(x, t) \in X \times T$, $|f(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$
et la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur T

D'où d'après le théorème de continuité sous le signe intégral :

La fonction F est continue sur $X = \mathbb{R}$ ✓

6) Soient $a > 0$, $X_a = [a, +\infty[$ et $T = [0, +\infty[$

- Pour chaque $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est C^1 sur X_a car la fonction $x \mapsto \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \frac{t}{(1+t^2)(1+xt^2)^2}$ est continue sur X_a

- Pour chaque $x \in X_a$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur T et intégrable d'après 1)

- Pour tout $(x, t) \in X_a \times T$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t}{(1+t^2)(1+a^2 t^2)}$$

et l'intégrale impropre en $t \rightarrow +\infty$ $\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+a^2 t^2)} dt$ converge

car l'intégrande est équivalent en $+\infty$
à $\frac{1}{t^2}$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge
d'après le critère de comparaison en $+\infty$

D'où d'après le théorème de dérivation sous le signe
intégrale la fonction F est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+tx^2)} dt$$

Or ceci est vrai pour tout $x > 0$, d'où F est C^1
sur $]0, +\infty[$.

$$7) \forall x \in]0, +\infty[\setminus \{1\}, \forall t \in [0, +\infty[$$

$$\frac{t}{(1+t^2)(1+tx^2)} = \frac{\frac{1}{1-x^2} t}{1+t^2} - \frac{\frac{x^2}{1-x^2} t}{1+(tx)^2}$$

D'où $\forall A > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) &= \frac{1}{2(1-x^2)} \left[\ln(1+t^2) \right]_0^A - \frac{x^2}{2(1-x^2)x^2} \left[\ln(1+(tx)^2) \right]_0^A \\ &= \frac{1}{2(1-x^2)} \ln\left(\frac{1+A^2}{1+A^2x^2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Or } \ln\left(\frac{1+A^2}{1+A^2x^2}\right) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} -\ln(x^2) \text{ car } \frac{1+A^2}{1+A^2x^2} = \frac{1 + \frac{1}{A^2}}{\frac{1}{A} + x^2} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}$$

et donc par continuité de $\ln$ on obtient cette limite

$$\text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, F(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$$

$$\text{et } P(1) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt = \left[\frac{-1}{2(1+t)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

✓ aussi
♥

8) L'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx$ est impropre en 0 et en 1

Soient $0 < a \leq b < 1$:

$$\int_a^b \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx = \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a) \text{ car}$$

la fonction F est C^1 sur le segment $[a, b]$
d'après la question 6.

Or $F(a) \xrightarrow{a \rightarrow 0^+} F(0)$ et $F(b) \xrightarrow{b \rightarrow 1^-} F(1)$ car la
fonction F est continue en 0 et en 1 d'après la
question 5. D'où $F(a) \xrightarrow{a \rightarrow 0^+} 0$ et $F(b) \xrightarrow{b \rightarrow 1^-} \frac{\pi^2}{8}$

d'après la question 2.

D'où $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx$ existe et vaut $\frac{\pi^2}{8} - 0$.

Donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx$ cv et vaut $\frac{\pi^2}{8}$.

✓ $\forall x \neq 1, F'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}$ et la fonction F' est continue en 1

d'après la question 6. D'où $F'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F'(x)$.

$$\text{Or } F'(x) = \frac{1}{x+1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{1}{2+t} \frac{\ln(1+t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

en posant $x = 1+t$. Donc $F'(1) = \frac{1}{2}$

Autre méthode
pour la q. 7.

9) Soit $N \in \mathbb{N}^*$

On remarque que

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Ces trois séries convergent d'après le critère de Cauchy

Donc par passage à la limite $N \rightarrow +\infty$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\text{Or } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad (*)$$

$$\text{De plus, } \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx = \int_0^1 -\ln(x) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (x^2)^k \right) dx \quad \text{car } x \in]0,1[$$

Donc (sans réserve qu'on puisse intervertir $\int_0^1 dx \cdot \sum_{k=0}^{+\infty}$)

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 -\ln(x) (x^2)^k dx$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \forall k \in \mathbb{N}, \int_0^1 -\ln(x) (x^2)^k dx &= \left[-\ln(x) \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^1 \\ &\quad + \int_0^1 \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)x} dx \\ &= \frac{1}{(2k+1)^2} \end{aligned}$$

en effectuant une intégration par parties avec les fonctions C^1 $x \mapsto -\ln(x)$ et $x \mapsto \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

et car le terme entre crochets converge

car $x^{2k+1} \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ par croissance comparée

$$\text{Donc } \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

D'ici d'après (*) et 8) il vient que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

d'ap. le th. d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque

Ensemblement, on peut intervertir $\sum$ et $\int$ car :

On pose $\forall k \in \mathbb{N}^+$, $f_k :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ -\ln(x) x^{2k} \end{cases}$$

Cette suite de fonctions est une suite de fonctions continues et intégrables sur $]0, 1[$ et

la série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement sur $]0, 1[$ (car c'est une série géométrique)

la série de réels $\sum \int_0^1 |f_k(x)| dx = \sum \int_0^1 -\ln(x) x^{2k} dx$
converge car $\int_0^1 -\ln(x) x^{2k} dx = \frac{1}{(2k+1)^2}$ et la série $\sum \frac{1}{(2k+1)^2}$ converge

la série numérique $\sum f_k(x)$ est