

Ex 7 révisé

Merci à Alexander

a) f est diagonalisable, donc $E = \bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}(f)$.

Soit $u \in E_{\lambda_i}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. $L_i(f)$ est bien défini car les endomorphismes $(f - \lambda_j \text{id}_E) \in \text{Ker}(f)$ commutent.
 la composée, par le produit

$$L_i(f)(u) = p_i(u) = \left(\prod_{j \neq i} \frac{f - \lambda_j \text{id}_E}{\lambda_i - \lambda_j} \right) u = \frac{1}{\prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)} \times \left(\prod_{j \neq i} (f - \lambda_j \text{id}_E) \right) (u), \text{ et } \frac{1}{\prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)} \neq 0.$$

$$\text{Donc } \text{Ker}(f_i) = \text{Ker} \left(\prod_{j \neq i} (f - \lambda_j \text{id}_E) \right) \supset \bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}(f), \text{ et}$$

$$\forall u \in E_{\lambda_i}(f), p_i(u) = \frac{\prod_{j \neq i} (f - \lambda_j \text{id}_E)(u)}{\prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)} = \left(\prod_{j \neq i} \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right) u = u, \text{ donc } \text{Im}(p_i) \supset E_{\lambda_i}.$$

On d'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker}(p_i) + \dim \text{Im}(p_i) = n$, or $\dim E_{\lambda_i}(f) + \dim \left(\bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}(f) \right) = n$

donc $\begin{cases} \text{Im } p_i = E_{\lambda_i}(f) \\ \text{Ker } p_i = \bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}(f) \end{cases}$ et $\forall u \in \text{Im } p_i, p_i(u) = u$ i.e. $p_i \circ p_i = p_i$.

α donc p_i est le projecteur sur $E_{\lambda_i}(u)$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}(u)$.
 oui

On considère une base B adaptée à $f: B = (e_1, \dots, e_n)$ construite en ~~une base~~ la concaténation de bases de E_{λ_j} dans cet ordre, et on pose $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \mu_j = \dim E_{\lambda_j}$.

$$\text{Alors } [f]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, [f^k]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1^k & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n^k \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}. \text{ On}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, [p_i]_B = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \text{ et alors } \forall k \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n \lambda_i^k [p_i]_B = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \lambda_i^k & & & \\ & & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{bmatrix} = [f^k]_B, \text{ donc}$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad f^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k p_i.$$

b) On pose $P = \prod_{i=1}^s (X - \mu_i) = \sum_{i=0}^s a_i X^i$. P est alors scindé à racines simples, et

$$P(f) = \sum_{i=0}^s a_i f^i = \sum_{i=0}^s \sum_{j=1}^s a_i \mu_j^i f_j = \sum_{j=1}^s P(\mu_j) f_j = \sum_{j=1}^s 0 f_j = 0.$$

Donc f est annulée par un polynôme à racines simples, i.e.

f est diagonalisable. **On i**

c) Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les n vp distinctes de f , B une base propre de E tq $F = [f]_B = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Soit $g \in C(f)$, $G = [g]_B$.

Soit $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = U$ un $\vec{v}_p$ de F , ~~asso~~ $i \in [1, n]$ tq $FU = \lambda_i U$. Alors $F \circ G = G \circ F$ donc

$GFU = \lambda_i GU = FGU$, donc GU est un $\vec{v}_p$ de F , ~~asso~~ associé à λ_i .

Donc pour tout $\vec{v}_p$ u de f , ~~asso~~ en notant $i \in [1, n]$ tq $f(u) = \lambda_i u$, $f(g(u)) = \lambda_i g(u)$ de $\dim E_{\lambda_i} = 1$ donc $g(u) \in \text{Vect}(u) = E_{\lambda_i}$, i.e. $g(u)$ est un $\vec{v}_p$ de g .

Ainsi, B est une base de $\vec{v}_p$ de g , donc g est diagonalisable et

$G = \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ où $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in K^n$.

$\forall P \in K[X]$, $P(F) = \text{Diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$.

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont ~~des~~ **deux à deux** distinctes, donc d'après le théorème d'interpolation de Lagrange, $\exists! P \in K_{n-1}[X] \forall i \in [1, n] P(\lambda_i) = \mu_i$, et alors P est l'unique polynôme de $K_{n-1}[X]$ tq $G = P(F)$ i.e. $G = P(f)$.

Soit $k \in K$, $g_1, g_2 \in C(f)$. Alors $(g_1 + kg_2) \circ f = g_1 \circ f + k(g_2 \circ f) = f \circ g_1 + k(f \circ g_2) = f \circ (g_1 + kg_2)$. Donc $C(f)$ est un $\text{L}(E)$.

On veut maintenant que $K_{n-1}[X] \xrightarrow{P \mapsto P(f)} C(f)$ soit une bijection, et de plus elle est linéaire.

Donc $\dim K_{n-1}[X] = n = \dim C(f)$.

On i