

* Reviser l'analogie
I du chapitre III.

Thème 2

Merci à
Adrien Lépris.

Exercice 5

Posons $E = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

Soit $f \in E$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $U(f)$ est donc continue, ~~car~~ dérivable, sur $\mathbb{R}_+^*$

~~Donc la fonction~~

La fonction f est en particulier continue en 0:

$$f(x) = f(0) + o(1)$$

En intégrant le développement limité :

$$\int_0^x f(t) dt = f(0)x + o(x)$$

D'où

$$U(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = f(0) + o(1)$$

Donc

$$U(f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0) = U(f)(0)$$

La fonction $U(f)$ est bien continue sur $\mathbb{R}_+$:

L'application vectorielle $E \rightarrow \mathbb{R}$ est donc stable par U

Soient $f_1, f_2 \in \mathbb{R}^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$
on vérifie

$$U(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(0) = \lambda_1 U(f_1)(0) + \lambda_2 U(f_2)(0)$$

$$= \lambda_1 f_1(0) + \lambda_2 f_2(0)$$

$$= \lambda_1 U(f_1)(0) + \lambda_2 U(f_2)(0)$$

or

$$\forall x > 0, U(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x (\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)) dt$$

$$= \frac{1}{x} \left(\int_0^x \lambda_1 f_1(t) dt + \int_0^x \lambda_2 f_2(t) dt \right), \text{ par linéarité de l'intégrale}$$

$$= \lambda_1 U(f_1)(x) + \lambda_2 U(f_2)(x)$$

Antécédent: la fonction f est continue
sur $[0, +\infty[$, d'où $F: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^x f(t) dt$
est une primitive de f . D'où $F'(x) = f(x)$. Or
 $F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = f(0)$.
Donc $U(f)(0) = f(0)$.

Où:
Voir aussi:
une 2^{nde}
méthode
en page 4
♥

L'application U est donc un endomorphisme de E

Soit $f \in E$

$$f \in \ker(U) \Leftrightarrow U(f) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, U(f)(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} U(f)(0) = 0 \\ \forall x > 0, \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x > 0, \int_0^x f(t) dt = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x > 0, f(x) = 0 \end{cases}, \text{ en dérivant}$$

On fonction $(x \mapsto \int_0^x f(t) dt)$ qui est constante.

D'où

$$f \in \ker(U) \Leftrightarrow f = 0, \text{ donc } \ker(U) = \{0\}$$

L'endomorphisme U est donc injectif

Parmi, $0 \notin \text{Im}(U)$.

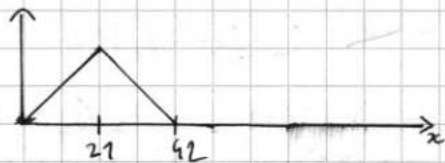
Soit $g \in \text{Im}(U)$, on a $g = U(f)$

Alors

$$\forall x > 0, g(x) \cdot x = \int_0^x f(t) dt$$

Or toute fonction de E n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

la fonction définie par $(x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 21] \\ 42-x & \text{si } x \in [21, 42] \\ 0 & \text{si } x \geq 42 \end{cases})$:



n'est pas dérivable en 21 et 42 alors qu'elle appartient bien à E

L'endomorphisme U n'est donc pas surjectif

Qui : la fonction $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ est une autre contre-exemple

* Impossible d'avoir cette condition car elle est réalisée, par définition, de l'application v .

Soit $f \in E$

$$f \in E_1(v) \Leftrightarrow v(f) = f$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+, v(f)(x) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt = f(x) \quad \text{pour } x > 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt = x f(x) \quad \text{pour } x > 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt = f(x) + x f'(x) \quad \text{pour } x > 0$$

dérivant la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque l'expression précédente nous indique que f est dérivable

Donc

$$f \in E_1(v) \Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt = f(x) + x f'(x) \quad \Leftrightarrow f \text{ est nulle sur }]0, +\infty[$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = f(0) \quad \text{car } f \text{ est continue en } 0 \text{ car } f \in E.$$

$$\Leftrightarrow f \text{ est une fonction constante}$$

L'ensemble des vecteurs de E invariants par v est donc l'ensemble des fonctions constantes

Par suite, $1 \in \text{Spl}(v)$.

De même, pour $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$$f \in E_\lambda(v) \Leftrightarrow v(f) = \lambda f$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt = \lambda x f(x) \quad \text{pour } x > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^x f(t) dt = \lambda x f(x) & L_1 \\ f(0) = \lambda f(0) & L_2 \end{cases}$$

$L_2 \Leftrightarrow f(0) = 0$ car $\lambda \neq 1$ par hypothèse.

$$L_1 \Leftrightarrow \forall x > 0, f'(x) + a(x)f(x) = 0$$

$$\text{on } a(x) = \frac{2-1}{2} \frac{1}{x} \text{ . D'où}$$

$$L_1 \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}, \forall x > 0, f(x) = K \cdot e^{-A(x)}$$

$$\text{on } A(x) = \frac{2-1}{2} \ln(x) \text{ . D'où}$$

$$L_1 \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}, \forall x > 0, f(x) = K \cdot x^{\frac{1-2}{2}} \\ = K x^{\frac{1}{2}-1}$$

De plus, une telle fonction f appartient à E

$$\text{ssi } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 = f(0) \text{ d'apr. L2}$$

$$\text{ssi } \frac{1}{2} - 1 > 0$$

$$\text{ssi } 2 \in]0, 1[$$

$$\Rightarrow \text{on a } S_p(f) =]0, 1]$$

La fonction $u(f): x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x > 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue sur

$]0, +\infty[$ par les thés. usuels. Elle est aussi continue en 0 ssi

$$u(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} f(0) = u(f)(0)$$

$$\text{Or } \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt - f(0) = \frac{1}{x} \int_0^x [f(t) - f(0)] dt \text{ , d'où}$$

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt - f(0) \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - f(0)| dt \text{ d'apr. l'inégalité triangulaire.}$$

$$\text{Soit } \varepsilon > 0: \exists \delta > 0, |t-0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(0)| < \varepsilon \text{ car } f \text{ est continue en } 0 \text{ car } f \in E$$

$$\text{D'où: } |x-0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - f(0)| dt < \varepsilon \Rightarrow |u(f)(x) - u(f)(0)| < \varepsilon$$

Donc la fonction $u(f)$ est continue en 0.

Thème 2;

Exercice 6 (1^{ère} méthode):

Soient de telles matrices A et B :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et P_n le prédicat tel que $P_n(m): AB^m - B^m A = B^m \times m$

$P_1(1)$ est vrai car $AB^1 - B^1 A = 1 \times A$

Soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose $P_m(m)$ vrai.

$$AB^m - B^m A = m B^m$$

Donc

$$B A B^m - B^{m+1} A = m B^{m+1}$$

Soit

$$(AB - B) B^m - B^{m+1} A = m B^{m+1}$$

Donc

$$AB^{m+1} - B^{m+1} A = (m+1) B^{m+1}$$

Donc $P_m(m) \Rightarrow P_{m+1}(m+1)$

Par principe de récurrence: $\forall m \in \mathbb{N}^*, AB^m - B^m A = m B^m$

Posons U_A l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{K}) : (M \mapsto AM - MA)$

Donc $\forall m \in \mathbb{N}^*, U_A(B^m) = m B^m$

Par l'absence:

Supposons que $\nexists p \in \mathbb{N}, B^p = 0$:

$\forall m \in \mathbb{N}^*, B^m$ est un vecteur propre de U_A associé à la valeur propre m

La famille $(B, \dots, B^{n^2+1})$ est une famille libre de $M_n(\mathbb{K})$ puisque composée de vecteurs propres associés aux valeurs propres $(1, \dots, n^2+1)$ distinctes deux à deux.

Or $M_n(\mathbb{K})$ n'est que de dimension $n^2 < \| (B, \dots, B^{n^2+1}) \|$: contradiction

Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $B^p = 0$. Donc la matrice B est nilpotente

Merci à Paul Narinier.

Exercice 6 (autre méthode):

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $AB - BA = B$

Posons le prédicat Π_k , " $AB^k - B^kA = kB^k$ "

Π_1 est vraie par hypothèse

Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose Π_k

$$\begin{aligned} \cancel{k B^{k+1}} &= \cancel{AB^k} \\ B^{k+1} &= (AB - BA) B^k \\ &= AB^{k+1} - BAB^k \end{aligned}$$

$$\cancel{AB^{k+1}} - \cancel{B^{k+1}A} = \cancel{AB}(\cancel{AB^k} - B)$$

$$\begin{aligned} AB^{k+1} - B^{k+1}A &= AB^k B - B^k AB + B^k AB - B^k BA \\ &= (AB^k - B^kA)B + B^k(AB - BA) \\ &= kB^k B + B^k B \\ &= (k+1)B^{k+1} \end{aligned}$$

Donc Π_{k+1} vraie

D'où par ~~hypothèse~~ principe de récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{(k+1)B^{k+1}}{kB^k} = \frac{AB^{k+1} - B^{k+1}A}{AB^k - B^kA}$$

Soit $\|\cdot\|$ une norme sous multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Par l'absurde supposons B ne pas être nilpotente

D'où $\forall k \in \mathbb{N}^*, \|B^k\| \neq 0$

$$\begin{aligned} \|kB^k\| &= \|AB^k - B^kA\| \\ &\leq \|AB^k\| + \|B^kA\| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\ &\leq 2\|A\|\|B^k\| \quad \text{car la norme est sous multiplicative} \end{aligned}$$

D'où

$$k \leq 2\|A\| \quad \text{car } \|B^k\| > 0$$

C'est absurde. Donc la matrice B est nilpotente.