

Corrigé de la q. 2 de l'exo 6 du TD 15

Merci à Louis Pagès

2) On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|$ issue du produit scalaire
 $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$.

Ainsi:

$\forall M \in O_n(\mathbb{R}), \|M\| = \sqrt{\text{Tr}(M^T M)} = \sqrt{\text{Tr}(I_n)} = \sqrt{n}$ qui ne dépend pas de M .
Donc $O_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $M_n(\mathbb{R})$. 

$\triangleright O_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$

$O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$ avec $f: M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto M^T M$.

On:

* $\{I_n\}$ est une partie finie de $M_n(\mathbb{R})$.

* f est la composée de la fonction $(M_1, M_2) \mapsto M_1^T M_2$ qui est bilinéaire donc continue (car $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie) avec la fonction $M \mapsto (M, M)$ qui est linéaire donc continue.

Donc $O_n(\mathbb{R})$ est fermé.

on:

Ainsi comme $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $O_n(\mathbb{R})$ est compacte.

$\triangleright$ Par l'abondance, supposons que $O_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Il existe donc une fonction $M: [0, 1] \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ continue telle que
 $M(0) = I_n, M(1) = -I_n$ et $\forall t \in [0, 1], M(t) \in O_n(\mathbb{R})$.

De cette dernière condition: $\forall t \in [0, 1], \det(M(t)) \in \{-1, 1\}$. (*)

Or la fonction $\det$ est continue (comme j'ai montré en colle 20).

Donc la fonction $\det \circ M$ est continue. Or $\det M(0) = 1$ et $\det M(1) = -1$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $t \in]0, 1[$ tel que $\det(M(t)) \in]-1, 1[$. Aboude d'après (*).
Donc $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

▷ $SO_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{1\}) \cap \det^{-1}(\{1\})$ avec f la fonction utilisée ci-haut.
Ainsi:

- * On a déjà montré que $f^{-1}(\{1\})$ est fermé.
- * Comme la fonction $\det$ est continue, et que $\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, $\det^{-1}(\{1\})$ est fermé.

D'où $SO_n(\mathbb{R})$ est un fermé en tant qu'intersection^{finie} de fermés.
Et $SO_n(\mathbb{R}) \subset O_n(\mathbb{R})$ qui est compact d'après, comme on l'a montré avant.
Donc $SO_n(\mathbb{R})$ est compact.

▷ D'après un exercice de cours de l'année C: $SO_n(\mathbb{R}) = e^{A_n(\mathbb{R})}$.
On:

- * la fonction exponentielle est continue.
- * $A_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel, donc en particulier $A_n(\mathbb{R})$ est convexe, donc $e^{A_n(\mathbb{R})}$ est connexe par arcs.

D'où $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs en tant qu'image directe d'un ensemble connexe par arcs par une fonction continue.

♥ Avec une autre norme: soit $\|X\|_2 = \sqrt{X^T X}$ pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$: $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|MX\|_2 = \|X\|_2$
car une isométrie conserve la norme euclidienne d'un vecteur.

D'où $\|M\|_2 = \sup_{X \neq 0} \frac{\|MX\|_2}{\|X\|_2} = 1$. Donc l'ensemble

$O_n(\mathbb{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$ subordonnée à $\|\cdot\|_2$, est borné.