Exercice 1 - Bureau de poste (⋆⋆)

Dans un bureau de poste il y a deux guichets. Chacune des personnes arrivant à la poste choisit le premier guichet avec une probabilité de $p \in]0,1[$, ou le deuxième guichet avec une probabilité $q = 1-p$, et chaque personne effectue son choix de façon indépendante. De plus on sait que le nombre X de personne arrivant au bureau en 1 heure suit une loi de Poisson de paramètre λ. On note respectivement Y et Z les variables aléatoires correspondant aux nombres de personnes choisissant, respectivement, le premier guichet et le deuxième guichet.

1. Exprimer la loi conjointe du couple (X, Y).

Soit $i, n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\mathbb{P}\Big(\{Y=i\} \cap \{X=n\}\Big) = \mathbb{P}(X=n) \times \mathbb{P}(Y=i|X=n)$$

Or d'après l'énoncé lorsque n personne rentre dans le bureau de poste il y a donc n choix indépendants, pour lesquels Y compte les succès avec une probabilité p. Dès lors $\mathbb{P}(Y=i|X=n) \rightsquigarrow \mathcal{B}(i,n)$, ainsi :

$$\mathbb{P}(Y=i|X=n) = \begin{cases} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} & \text{si } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dès lors on en déduit que :

$$\mathbb{P}\Big(\{Y=i\} \cap \{X=n\}\Big) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{i} p^i q^{n-i} & \text{si } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. En déduire la loi de Y, puis celle de Z.

Par sommation on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=i) &= \sum_{n=i}^{+\infty} \mathbb{P}\Big(\{Y=i\} \cap \{X=n\}\Big) \\
&= \sum_{n=i}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \\
&= e^{-\lambda} \times \frac{p^i}{q^i} \sum_{n=i}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{n!}{i!\,(n-i)!} q^n \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{i!} \left(\frac{p}{q}\right)^i \sum_{n=i}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^n}{(n-i)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{i!} \left(\frac{p}{q}\right)^i (\lambda q)^i \sum_{n=i}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{n-i}}{(n-i)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{i!} \left(\frac{p}{q}\right)^i (\lambda q)^i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^n}{n!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{i!} (\lambda p)^i e^{\lambda q} \\
&= e^{\lambda(1-p-1)} \frac{(\lambda p)^i}{i!} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!}
\end{aligned}$$

Ainsi on en déduit que $Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda p)$. De même on trouve $Z \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda q)$.

3. Y et Z sont-elles indépendantes ?

D'une part on a pour $i, j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=i)\times\mathbb{P}(Z=j) &= e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^i}{i!}\times e^{-\lambda q}\frac{(\lambda q)^j}{j!}\\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{i!j!}p^iq^j\end{aligned}$$

D'autre part, comme $X = Y + Z$ on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\{Y=i\}\cap\{Z=j\}\Big) &= \mathbb{P}\Big(\{Y=i\}\cap\{X-Y=j\}\Big)\\ &= \mathbb{P}\Big(\{Y=i\}\cap\{X=i+j\}\Big)\\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}\binom{i+j}{i}p^iq^j\\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{i!j!}p^iq^j\end{aligned}$$

D'où l'indépendance.

Exercice 2 - Un couple de VA (★★)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ tel que :

$$\mathbb{P}\Big((X=n)\cap(Y=m)\Big) = \frac{k}{(n+m+1)!}$$

1. Déterminer la valeur de k.

Comme il s'agit d'une probabilité on sait que la famille $\left(\frac{k}{(n+m+1)!}\right)$ est sommable et de plus on a :

$$1 = \sum_{\substack{0\leq n\\0\leq m}}\frac{k}{(n+m+1)!}$$

En sommant par paquets avec $I_p = \{(n,m)\in\mathbb{N}^2/\ n+m=p\}$ on trouve alors :

$$\begin{aligned}1 &= k\times\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{I_p}\frac{1}{(n+m+1)!}\\ &= k\times\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{I_p}\frac{1}{(p+1)!}\\ &= k\times\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{p+1}{(p+1)!}\\ &= k\times\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p)!}\\ &= k\times e\end{aligned}$$

On en déduit alors que $k = e^{-1}$.

2. Déterminer la loi de $Z = X + Y$, et calculer $E[Z]$.

Soit X et Y étant à valeurs dans $\mathbb{N}$ leur somme l'est également, soit donc $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=k) &= \mathbb{P}(X+Y=k) \\
&= \mathbb{P}\left[\bigcup_{p=0}^{k}\Big((X=p)\cap(Y=k-p)\Big)\right] \\
&= \sum_{p=0}^{k}\mathbb{P}\Big((X=p)\cap(Y=k-p)\Big) \\
&= \sum_{p=0}^{k}\frac{e^{-1}}{(p+k-p+1)!} \\
&= \sum_{p=0}^{k}\frac{e^{-1}}{(k+1)!} \\
&= (k+1)\times\frac{e^{-1}}{(k+1)!} \\
&= \frac{e^{-1}}{k!}
\end{aligned}$$

On en déduit que $Z \rightsquigarrow \mathcal{P}(1)$ et donc $E[Z]=1$.

Exercice 3 - Un couple de VA (⋆⋆)

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ tel que :

$$\mathbb{P}\Big((X=n)\cap(Y=m)\Big) = \frac{(n+m)\,\lambda^{n+m+}}{e^{2\lambda}n!m!}$$

1. Déterminer la valeur de λ.

Comme il s'agit d'une probabilité on sait que la famille $\left(\frac{(n+m)\lambda^{n+m}}{e^{2\lambda}n!m!}\right)$ est sommable et de plus on a :

$$1 = \sum_{\substack{0\le n\\0\le m}}\frac{(n+m)\,\lambda^{n+m}}{e^{2\lambda}n!m!}$$

Faire une sommation par paquet ne semble pas adaptée car les termes $n!$ et $m!$ ne se simplifieront pas. On va donc utiliser le théorème de Tonelli, pour cela on fixe $n\in\mathbb{N}$ on a alors pour $M\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{M}\frac{(n+m)\,\lambda^{n+m}}{e^{2\lambda}n!m!} &= e^{-2\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\times\sum_{m=0}^{M}\frac{(n+m)\,\lambda^m}{m!} \\
&= e^{-2\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\times\sum_{m=0}^{M}\frac{n}{m!}\lambda^m+\frac{m}{m!}\lambda^m \\
&= e^{-2\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\times\left(\sum_{m=0}^{M}\frac{n}{m!}\lambda^m+\lambda\times\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{(m-1)!}\lambda^{m-1}\right)
\end{aligned}$$

La première somme tendant vers ne^{λ} et la seconde vers λe^{λ} par passage à la limite on trouve :

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(n+m)\,\lambda^{n+m}}{e^{2\lambda}n!m!} = e^{-2\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\left(ne^{\lambda}+\lambda e^{\lambda}\right)$$

Pour $N \in \mathbb{N}$ on a de plus :

$$\sum_{n=0}^{N} e^{-2\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \left(ne^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}\right) = \sum_{n=0}^{N} e^{-\lambda} \frac{n\lambda^n}{n!} + \sum_{n=0}^{N} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n+1}}{n!}$$
$$= \lambda e^{-\lambda} \times \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} + \times \sum_{n=0}^{N} \frac{\lambda^n}{n!} \right)$$

La première somme tendant vers e^{λ} et la seconde vers e^{λ} on trouve par passage à la limite :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \left(ne^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}\right) = 2\lambda$$

Et au final on en déduit que $\lambda = \frac{1}{2}$

2. Calculer $E\left[2^{X+Y}\right]$.

D'après le théorème de transfert on sait que cette espérance est finie si, et seulement si, la famille $\left(2^k \mathbb{P}(X+Y=k)\right)$ est sommable. Or on a :

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \mathbb{P}\left[\bigcup_{p=0}^{k} \Big((X=p) \cap (Y=k-p) \Big)\right]$$
$$= \sum_{p=0}^{k} \mathbb{P}\Big((X=p) \cap (Y=k-p) \Big)$$
$$= \sum_{p=0}^{k} \frac{(p+k-p)}{e2^{p+k-p} p!\,(k-p)!}$$
$$= \sum_{p=0}^{k} \frac{k}{e2^k p!\,(k-p)!}$$
$$= \frac{k}{e2^k} \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{p!\,(k-p)!}$$
$$= \frac{k}{e2^k k!} \sum_{p=0}^{k} \frac{k!}{p!\,(k-p)!}$$
$$= \frac{k}{e2^k k!} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p}$$
$$= \frac{k}{e2^k k!} 2^k$$
$$= \frac{k}{ek!}$$

Ainsi $\mathbb{P}(X+Y=0) = 0$ d'où pour $K \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^{K} 2^k \mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{k=1}^{K} 2^k \frac{1}{(k-1)!} e^{-1}$$
$$= 2e^{-1} \sum_{k=1}^{K} \frac{2^{k-1}}{(k-1)!}$$

Par passage à la limite on en déduit donc que la famille $\left(2^k\mathbb{P}(X+Y=k)\right)$ est sommable et de plus on a :

$$E\left[2^{X+Y}\right]=\sum_{k=0}^{+\infty}2^k\mathbb{P}(X+Y=k)=2e^{-1}e^2=2e$$

Exercice 4 - Série Génératrice (⋆⋆)

Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$, et de loi de probabilité $\mathbb{P}(X=n)=p_n$ pour tout entier n. La fonction génératrice de X, notée G_X, est alors définie par $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}p_nt^n$.

1. Prouver que $]-1,1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X.

Comme X est une VA, sa loi est une loi de probabilité, en particulier la série $\sum p_n=1$ on en déduit que la série entière définissant G_X est de rayon de convergence supérieure ou égale à 1. En particulier $]-1,1($ est bien inclus dans l'ensemble de définition de G_X.

2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendants à valeur dans $\mathbb{N}$. On pose $S=X_1+X_2$. Démontrer que $\forall t\in\,]-1,1[\,,\ G_S(t)=G_{X_1}(t)\,G_{X_2}(t)$:

   2.a. En utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.

Notons R_1 le rayon de convergence de G_{X_1}, ainsi que R_2 celui de la série définissant G_{X_2}, puis R le rayon de convergence de la sérié entière produit $\sum c_nt^n$ où :

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X_1=k)\times\mathbb{P}(X_2=n-k)$$

On sait d'après le cours que $R\geq\min(R_1,R_2)$, mais d'après la question précédente on sait que $R_1\geq 1$ et $R_2\geq 1$ d'où $R\geq 1$. Dès lors par produit de Cauchy on a l'égalité :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X_1=n)\,t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X_2=n)\,t^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X_1=k)\times\mathbb{P}(X_2=n-k)\right)t^n$$

De plus pour $n\in\mathbb{N}$ on a les égalité d'évènements suivants :

$$(S=n)=(X_1+X_2=n)=\bigcup_{k=0}^{n}\Big[(X_1=k)\cap(X_2=n-k)\Big]$$

Comme la dernière écrite est une union disjointe d'évènements on obtient la formule :

$$\mathbb{P}(S=n)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X_1=k)\times\mathbb{P}(X_2=n-k)$$

Ainsi d'après ce qui précède on a l'égalité :

$$\forall t\in\,]-1,1[\,,\ G_{X_1}(t)\,G_{X_2}(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S=n)\,t^n=G_S(t)$$

D'où le résultat.

   2.b. En utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice par $G_X(t)=E\left[t^X\right]$.

Soit $t\in\,]-1,1[$ d'après la première question, les variables aléatoires t^{X_1} et t^{X_2} admettent une espérance. Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, il en est de même pour t^{X_1} et t^{X_2}, dès lors on a :

$$E\left[t^{X_1+X_2}\right] = E\left[t^{X_1} \times t^{X_2}\right] = E\left[t^{X_1}\right] \times E\left[t^{X_2}\right]$$

L'égalité précédente se traduit par $G_S(t) = G_{X_1}(t)\, G_{X_2}(t)$

3. Dans cette question on admet que le résultat précédent est vrai également pour n variables aléatoires indépendants à valeurs dans $\mathbb{N}$.

   Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on effectue n tirage successifs, avec ,remise, d'une boule du sac. On note alors S_n la somme des numéros tirés. Pour $t \in \left]-1, 1\right[$ déterminer la valeur de $G_{S_n}(t)$.

On note X_i la variable aléatoire égale au numéro tiré lors du i-ième tirage. De sorte que l'on peut écrire $S = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Les tirages étant effectués avec remise, il est pertinent de supposé les X_i indépendantes, et donc d'après le résultat précédent on a :

$$G_S(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t)$$

De plus on remarque que les X_i ont la même loi, à savoir $\mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_i = 2) = \frac{1}{4}$. Comme on sait que la fonction génératrice caractérise la loi, on en déduit que $\forall i \in \mathbb{N},\ G_{X_i} = G_{X_1}$. Enfin à l'aide des valeurs de la loi on trouve :

$$G_{X_1}(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 = \frac{1}{4}\left(t+1\right)^2$$

Ainsi on obtient une expression de G_S à savoir :

$$G_S(t) = \frac{1}{4^n}\left(t+1\right)^{2n} = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{k}{2n} t^k$$

Comme par définition $G_S(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S = k)\, t^k$ par unicité du développement en série entière on en déduit que S est à valeur dans $[\![0, 2n]\!]$ et de plus on a :

$$\forall k \in [\![0, 2n]\!],\ \mathbb{P}(S = k) = \binom{k}{2n}\frac{1}{4^n} = \binom{k}{2n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$$

On reconnaît alors la série génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre $\left(2n, \frac{1}{2}\right)$. Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on peut affirmer que S suit une telle loi binomiale.

Exercice 5 - Formule de Wald (⋆⋆⋆)

Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ iid et indépendante d'une variable aléatoire N également à valeur dans $\mathbb{N}$. On définit la variable aléatoire :

$$S = \sum_{k=1}^{N} X_k$$

1. Montrer que pour $t \in [-1,1]$ on a :

$$G_S(t) = G_N(G_{X_1}(t))$$

On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, et l'on commence par calculer $\mathbb{P}(S=k)$ en utilisant l'indépendance de S_n et N :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{S_n = k\} \cap \{N=n\}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n=k)\,\mathbb{P}(N=n)\end{aligned}$$

Ensuite par théorème de sommation par paquets on sait que pour $t \in [-1,1]$ on a :

$$\begin{aligned}G_S(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n=k)\,\mathbb{P}(N=n)\,t^k \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n=k)\,t^k\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n)\,G_{S_n}(t)\end{aligned}$$

Mais comme les (X_k) sont iid, on sait que :

$$G_{S_n}(t) = (G_{X_1}(t))^n$$

Dès lors :

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n)\,(G_{X_1}(t))^n = G_N(G_{X_1}(t))$$

2. Montrer que si N suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et X_1 suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors S suite une loi de Poisson $\mathcal{P}(p\lambda)$.

Avec les données de l'énoncé on trouve :

$$G_N(t) = e^{\lambda(t-1)} \qquad G_{X_1}(t) = pt + (1-p)$$

En combinant ces résultats avec celui de la question précédente, on obtient :

$$G_S(t) = e^{\lambda(pt+(1-p)-1)} = e^{p\lambda(t-1)}$$

Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on en déduit que S suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(p\lambda)$.

3. Montrer que si X_1 et N sont d'espérance finies, alors il en est de même pour S et on a la formule de Wald :

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\,\mathbb{E}[X_1]$$

Il faut éviter de dire un peu trop vite « G_S est dérivable en 1 par composition de fonctions dérivables en 1, et donc S admet une espérance finie qui vaut :

$$\mathbb{E}[S] = G'_S(1) = G'_{X_1}(1) \times G'_N(G_{X_1}(1)) = G'_{X_1}(1) \times G'_N(1) = \mathbb{E}[X_1]\,\mathbb{E}[N]$$

Ce qu'il fallait démontrer. »

En effet, il n'existe pas de théorème générale quant à la dérivabilité à gauche par composition. On procède alors en revenant au taux de variation à savoir :

$$\begin{aligned}\frac{G_S(1) - G_S(t)}{1-t} &= \frac{G_N(1) - G_N(G_{X_1}(t))}{1-t(t)} \\ &= \frac{G_N(1) - G_N(G_{X_1}(t))}{1 - G_{X_1}(t)} \times \frac{1 - G_{X_1}(t)}{1-t}\end{aligned}$$

Le terme $\dfrac{1 - G_{X_1}(t)}{1-t}$ converge bien vers $G'_{X_1}(1)$ par hypothèse, en revanche pour utiliser la dérivabilité à gauche de G_N en 1 il y a une justification à apporter.

Plus précisément, il faut justifier que lorsque t tends vers 1 par valeurs inférieurs, il en est de même pour $G_{X_1}(t)$. Bien sûr par continuité de G_{X_1} on sait que la limite est bien 1, mais pour justifier que $G_{X_1}(t) < 1$ pour t assez proche de 1 il faut remarquer $G'_{X_1}(1) = \mathbb{E}[X_1] > 0$ (le cas $\mathbb{E}[X_1] = 0$ implique que X_1 est identiquement nulle et donc la formule de Wald se démontre sans problème).

Finalement on peut bien utiliser la dérivabilité à gauche de G_N en 1 pour passer à la limite et obtenir que G_S est dérivable à gauche en 1 et de plus :

$$G'_S(1) = G'_{X_1}(1) \times G'_N(G_{X_1}(1))$$

Ce qui conclut la démonstration.

Exercice 6 - Une série de matrice (⋆⋆)

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} A^{2n}$$

Exercice 7 - Exponentielle de matrice (⋆⋆⋆)

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice, on pose :

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

1. Montrer que e^A est bien définie.

On muni $\mathscr{M}_n(\mathbb{A})$ d'une norme d'algèbre c'est-à-dire une norme vérifiant :

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{A})\,,\ \|A \times B\| \leq \|A\| \times \|B\|$$

Dès lors on considère la suite $(P_N(A))_{N\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ P_N(A) = \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}$$

Par propriété de la norme d'algèbre on a :

$$\|P_N(A)\| \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{\|A\|^k}{k!} \leq e^{\|A\|}$$

Dès lors la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ converge normalement, ainsi e^A est bien définie.

2. Montrer que e^A est un polynôme en A.

Soit $\mathbb{R}[A]$ l'ensemble des polynômes en A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dès lors il est de dimension fini donc fermé. De plus la suite définie $(P_N(A))_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite d'élément de $\mathbb{R}[A]$ qui converge d'après la question précédente. Ainsi la limite est un élément de $\mathbb{R}[A]$ autrement dit $e^A \in \mathbb{R}[A]$, ce qu'il fallait démontrer.

3. Si A est symétrique, montrer que A est un polynôme en e^A.

Par le théorème Spectrale on peut affirmer que A est diagonalisable. Soit alors $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que $P^{-1}AP = D$. On vérifie que $e^D = \mathrm{diag}\big(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}\big)$ et que $e^D = P^{-1}e^A P$. On considère alors $I \subset [\![1, n]\!]$ tel que $\forall\,(i,j) \in I^2,\ i \neq j \Longrightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$ et $\forall j \in [\![1, n]\!],\ \exists i \in I,\ \lambda_j = \lambda_i$.

Dès lors on fait une interpolation de Lagrange des λ_i par les e^{λ_i}, on considère donc :

$$Q_i(X) = \prod_{\substack{j\in I\\ j\neq i}} \frac{X - e^{\lambda_j}}{e^{\lambda_i} - e^{\lambda_j}}$$

On pose alors :

$$Q(X) = \sum_{i\in I} \lambda_i \times Q_i(X)$$

On peut alors vérifier que $Q\big(e^D\big) = D$ et donc $PQ\big(e^D\big)\,P^{-1} = PDP^{-1} = A$. De plus on a :

$$PQ\big(e^D\big)\,P^{-1} = Q\big(Pe^D P^{-1}\big) = Q\Big(e^{P^{-1}DP}\Big) = Q\big(e^A\big)$$