

CORRIGÉ DE LA COLLE N° 20

Couples de v.a. & séries de matrices

21 MARS 2025

Exercice 1. On réalise une suite d'épreuves de Bernoulli (Succès ou Echec) indépendantes. La probabilité de chaque succès est $p \in]0, 1[$ et celle de chaque échec est $q = 1 - p$. On appelle « run » de longueur $k \in \mathbb{N}^*$ une suite de k résultats identiques consécutifs interrompue par un résultat contraire. Soient X la longueur du premier « run » et Y la longueur du deuxième.

Par exemple, si le résultat est $SSSSES \dots$, alors le premier « run » est $SSSS$ et sa longueur est 4 ; le deuxième « run » est E et sa longueur est 1.

1. Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Calculer $P(X = a, Y = b)$ et en déduire que

$$P(X = a) = p^a q + q^a p \quad \text{et} \quad P(Y = b) = p^{b-1} q^2 + q^{b-1} p^2.$$

2. Montrer que, si $p = \frac{1}{2}$, alors les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

3. Montrer que X et Y sont d'espérance finie, que $E(X) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}$ et que $E(Y) = 2$.

1. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, notons S_n l'événement « la n -ième épreuve est un succès » et E_n l'événement contraire.

L'événement $(X = a) \cap (Y = b)$ est la réunion des deux événements $A = S_1 \cap \dots \cap S_a \cap E_{a+1} \cap \dots \cap E_{a+b} \cap S_{a+b+1}$ et $B = E_1 \cap \dots \cap E_a \cap S_{a+1} \cap \dots \cap S_{a+b} \cap E_{a+b+1}$ qui sont incompatibles (c'est-à-dire disjoints).

D'où $P(X = a, Y = b) = P(A) + P(B)$.

De plus, les épreuves de Bernoulli sont indépendantes, d'où $P(A) = P(S_1) \times \dots \times P(S_a) \times P(E_{a+1}) \times \dots \times P(E_{a+b}) \times P(S_{a+b+1}) = p^a q^{a+1}$ et, de même, $P(B) = q^a p^{a+1}$.

Donc $P(X = a, Y = b) = p^a q^{a+1} + q^a p^{a+1}$.

Par suite, $P(X = a) = \sum_{b=1}^{\infty} P(X = a, Y = b) = \sum_{b=1}^{\infty} (p^a q^{a+1} + q^a p^{a+1}) = q^{a+1} \frac{p}{1-p} + p^{a+1} \frac{q}{1-q} = q^a p + p^a q$.

Et $P(Y = b) = \sum_{a=1}^{\infty} P(X = a, Y = b) = \sum_{a=1}^{\infty} (p^b q^{a+1} + q^b p^{a+1}) = p^b \frac{q^2}{1-q} + q^b \frac{p^2}{1-p} = p^{b-1} q^2 + q^{b-1} p^2$.

2. Si $p = \frac{1}{2}$, alors $P(X = a, Y = b) = \frac{1}{2^{a+b}}$, $P(X = a) = \frac{1}{2^a}$ et $P(Y = b) = \frac{1}{2^b}$ d'après la question précédente. D'où :

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \forall b \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = a, Y = b) = P(X = a) \cdot P(Y = b).$$

Donc les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si $p = \frac{1}{2}$.

3. La série $\sum a P(X = a)$ est la combinaison linéaire $p \sum a q^a + q \sum a p^a$ de deux séries. Ces deux séries sont absolument convergentes car $|p| < 1$, $|q| < 1$ et $\heartsuit$. D'où la série $\sum a P(X = a)$ est convergente, donc la v.a. X est d'espérance finie.

$$\text{Et } E(X) = \sum_{a=1}^{\infty} a P(X = a) = p \sum_{a=1}^{\infty} a q^a + q \sum_{a=1}^{\infty} a p^a = p \frac{q}{(1-q)^2} + q \frac{p}{(1-p)^2} = \frac{q}{p} + \frac{p}{q}.$$

De même, la v.a. Y est d'espérance finie et $E(Y) = q^2 \frac{1}{(1-p)^2} + p^2 \frac{1}{(1-q)^2} = 2$.

$\heartsuit$ Le rayon de convergence de la série entière $\sum x^a$ est 1. Et on peut dériver terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence. Le rayon de convergence de la série entière $\sum a x^a = x \sum a x^{a-1}$ est donc aussi 1 et :

$$\forall x \in]-1, +1[, \quad \sum_{a=1}^{\infty} a x^a = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Exercice 2. Soient un entier $p \in \mathbb{N}^*$, une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et la suite des matrices $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$.

- Justifier que le déterminant $\det : \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est une application continue et que, à partir d'un certain rang n , la matrice S_n est inversible.
- Montrer que $\left(I_p + \frac{A}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^A$.

(On pourra choisir une norme sous-multiplicative et étudier la suite des réels $\left\|S_n - \left(I_p + \frac{A}{n}\right)^n\right\|$. Mêmes idées que dans les exercices [▷ XI.46 & TD9.10](#).)

- L'application $\det : M \mapsto \det M$ est continue car c'est la composée $f \circ g$ de deux applications continues :
 - l'application $g : \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \rightarrow (\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}))^p$, $M \mapsto (C_1, \dots, C_p)$ associée à chaque matrice ses colonnes, elle est linéaire sur un ev de dimension finie, donc continue;
 - l'application $f : (C_1, \dots, C_p) \mapsto \det(C_1, \dots, C_p)$ est multilinéaire sur un ev de dimension finie, donc continue.

La suite des matrices S_n tend vers e^A , d'où la suite des réels $\det(S_n)$ tend vers $\det(e^A)$ par continuité du déterminant. Or la matrice e^A est inversible, d'où $\det(e^A) \neq 0$. D'où $\det(S_n) \neq 0$ à partir d'un certain rang, donc la matrice S_n est inversible à partir de ce rang.

2.

$$\left\| \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} - \left(I_p + \frac{A}{n}\right)^n \right\| = \left\| \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k} \right) A^k \right\| \leq \sum_{k=0}^n \left| \frac{1}{k!} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k} \right| \|A^k\|$$

d'après l'inégalité triangulaire. D'une part, $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ si on prend soin de choisir une norme sous-multiplicative. D'autre part, $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{1}{k!} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \right) \geq 0$, ce qui permet d'enlever la valeur absolue. D'où

$$\left\| S_n - \left(I_p + \frac{A}{n}\right)^n \right\| \leq \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k} \right) \|A\|^k = \sum_{k=0}^n \frac{\|A\|^k}{k!} - \left(1 + \frac{\|A\|^n}{n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{\|A\|} - e^{\|A\|} = 0.$$

Par le théorème des gendarmes, on déduit que $\left\| S_n - \left(I_p + \frac{A}{n}\right)^n \right\|$ tend vers 0 quand n tend vers ∞ . Enfin

$$0 \leq \left\| e^A - \left(I_p + \frac{A}{n}\right)^n \right\| \leq \|e^A - S_n\| + \left\| S_n - \left(I_p + \frac{A}{n}\right)^n \right\|$$

par l'inégalité triangulaire. D'où $\left\| e^A - \left(I_p + \frac{A}{n}\right)^n \right\|$ tend vers 0 d'après le théorème des gendarmes, donc

$$e^A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I_p + \frac{A}{n}\right)^n.$$