

Exercice 3

Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$. Merci à Romain Leclerc

- Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f: t \mapsto (\tan t)^n$ est continue sur $[0; \frac{\pi}{4}]$ et la fonction

$\varphi: u \mapsto \arctan u$ est de classe C^1 sur $[0; 1]$, à valeurs dans $[0; \frac{\pi}{4}]$.

D'après le théorème du changement de variables, $\int_0^1 f(\varphi(u)) \varphi'(u) du = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} f(t) dt$.

$$\text{Donc } u_n = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} f(t) dt = \int_0^1 u^n \cdot \frac{1}{1+u^2} du$$

Pour tout $u \in [0; 1]$, $0 < 1+u^2 \leq 2$ donc $0 < \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+u^2}$ donc $\frac{u^n}{2} \leq \frac{u^n}{1+u^2}$ car $u^n \geq 0$

Par croissance de l'intégrale, $u_n \geq \int_0^1 \frac{u^n}{2} du = \frac{1}{2(n+1)}$

Or $\frac{1}{2(n+1)} > 0$ et la série $\sum \frac{1}{2(n+1)}$ diverge, donc la série $\sum u_n$ diverge, donc $R \leq 1$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{4}]$, $0 \leq \tan t \leq 1$ par croissance de $\tan$ sur $[0; \frac{\pi}{4}]$ donc $0 \leq (\tan t)^{n+1} \leq (\tan t)^n$. Par croissance de l'intégrale, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est décroissante, elle admet donc une limite l par le théorème de la limite monotone.

$$u_n + u_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2 t) (\tan t)^n dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale}$$

$$= \int_0^{\pi/4} \tan^2(t) (\tan t)^n dt = \left[\frac{(\tan t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Or $u_n + u_{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2l$ donc par unicité de la limite, $l = 0$.

La suite (u_n) tend vers 0 en décroissant. D'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum (-1)^n u_n$ converge. D'où $R \geq 1$.

- On en déduit : $R = 1$, et la série $\sum u_n x^n$ converge $\Leftrightarrow x \in [-1; 1[$.

Première méthode:

On peut calculer la somme. Fixons $x \in]-1; 1[$ et notons $f_n: [0; \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto (x \tan t)^n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0; \frac{\pi}{4}]$, $|f_n(t)| = |x \tan t|^n \leq |x|^n$ car $0 \leq \tan t \leq 1$.

Comme $|x| < 1$, la série géométrique $\sum |x|^n$ converge, donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[0; \frac{\pi}{4}]$, et a fortiori uniformément sur ce segment. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, $\int_0^{\pi/4} \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/4} f_n$.

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/4} (x \tan t)^n dt = \int_0^{\pi/4} \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \int_0^{\pi/4} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (x \tan t)^n \right) dt$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1 - x \tan t} \quad \text{car } |x \tan t| < 1, \text{ pour tout } t \in [0; \frac{\pi}{4}].$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1-xu} \cdot \frac{1}{1+u^2} du \quad \text{avec le changement de variable } u = \tan t$$

$$= \frac{1}{1+x^2} \int_0^1 \left(\frac{x^2}{1-xu} + \frac{xu}{1+u^2} + \frac{1}{1+u^2} \right) du$$

$$= \frac{1}{1+x^2} \left[-x \ln |1-xu| + \frac{x}{2} \ln |1+u^2| + \arctan(u) \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{1+x^2} \left(-x \ln |1-x| + \frac{x}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} \left(\frac{\pi}{4} + x \ln \frac{\sqrt{2}}{1-x} \right)$$

et par continuité, d'après le th. d'Abel radial,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n (-1)^n = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi}{8} + \frac{\ln 2}{4}$$

α

Merci à Paul P.

Seconde méthode:

Soit $x \in]-1, 1[$.
 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/4} (x \tan t)^n dt$.
 - D'abord la fonction $t \mapsto (x \tan t)^n$ est intégrable sur $[0, \pi/4]$ (car continue sur $[0, \pi/4]$ segment). Et $0 \leq \int_0^{\pi/4} |x \tan t|^n dt \leq \int_0^{\pi/4} |x|^n 1 dt$ par croissance de l'intégrale et car $|\tan t| \leq 1 \forall t \in [0, \pi/4]$.
 $|x| < 1$, donc la série $\sum |x|^n$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \int_0^{\pi/4} |x \tan t|^n dt$ converge.

Enfin $\forall t \in [0, \pi/4]$, la série $\sum (x \tan t)^n$ converge (car $|x \tan t| < 1$) et sa somme est $\frac{1}{1-x \tan t}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1-x \tan t}$ est continue sur $[0, \pi/4]$ ✓ sur un intervalle quelconque

Donc par le théorème d'intégration série-intégrale, $t \mapsto \frac{1}{1-x \tan t}$ est intégrable sur $[0, \pi/4]$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/4} (x \tan t)^n dt = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1-x \tan t} dt$.

* Théorème V4.16

** Théorème V4.16