

Merci à Alan.  
et à Félix.

# Exercice 4 SAT

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = e^{-n} \cos(n^2 x)$$

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f'_n(x) = -e^{-n} n^2 \sin(n^2 x)$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on suppose  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} f_n^{(2k)}(x) &= (-1)^k n^{4k-n} \cos(n^2 x) \\ f_n^{(2k+1)}(x) &= (-1)^{k+1} n^{4k+2-n} \sin(n^2 x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f_n^{(2k+1)})'(x) &= (-1)^{k+1} n^{4k+2-n} n^2 \cos(n^2 x) \\ &= f_n^{(2(k+1))}(x) = (-1)^{k+1} n^{4(k+1)-n} \cos(n^2 x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } (f_n^{(2k)})'(x) &= (-1)^k n^{4k-n} n^2 (-1) \sin(n^2 x) \\ &= (-1)^{k+1} n^{4k+2-n} \sin(n^2 x) = f_n^{(2(k+1)+1)}(x) \end{aligned}$$

Par principe de récurrence  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},$

$$\begin{cases} f_n^{(2k)}(x) = (-1)^k n^{4k-n} \cos(n^2 x) \\ f_n^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} n^{4k+2-n} \sin(n^2 x) \end{cases}$$

les fonctions sont continues sur  $\mathbb{R}$   
Donc  $f_n$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$

UTILE ?

Oui ! car  
les formules  
étaient données

Exercice 4Soit  $N \in \mathbb{N}$ .\* les fonctions  $f_n$  sont de classe  $C^N$  sur  $\mathbb{R}$ \* Pour tout  $k \in [0, N-1]$ , la série de fonctions  $\sum f_n^{(k)}$  cvs sur  $\mathbb{R}$  car (1)\* la série de fonctions  $\sum f_n^{(N)}$  CVU sur  $\mathbb{R}$  car (2)donc la série de fonctions  $\sum f_n$  est de classe  $C^N$ 

$$\text{et } \forall x, f^{(2k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(2k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} n^{4k} e^{-n} \cos(n^2 x)$$

$$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} n^{4k+2} e^{-n} \sin(n^2 x)$$

Ceci est vrai pour tout  $N \in \mathbb{N}$  donc  $f$  est  $C^\infty$ 

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{2} n^{2k} e^{-n}$$

$$\text{et } 0 \leq n^{2k} e^{-n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et la série } \sum \frac{1}{n^2} \text{ cv}$$

donc  $\forall k \in \mathbb{N}$ , la série de fonctions  $\sum f_n^{(k)}$  CVU sur  $\mathbb{R}$ (1) donc  $\forall k \in [0, N-1]$ , la série de fonctions  $\sum f_n^{(k)}$  cvs sur  $\mathbb{R}$ (2) donc la série de fonctions  $\sum f_n^{(N)}$  CVU sur  $\mathbb{R}$ **Première méthode:**\* Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\forall k \in \mathbb{N}, f^{(2k+1)}(0) = 0$$

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} n^{4k} e^{-n}$$

$$\text{or } \left| \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} \right| \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} (2k)^{-2k} e^{2k} \sum_{n=0}^{\infty} n^{4k} e^{-n}$$

$$\text{car d'après la formule de Stirling } (2k)! \sim \left(\frac{2k}{e}\right)^{2k} \sqrt{4\pi k}$$

$$\text{or } \frac{|x|^{2k}}{\sqrt{4\pi k}} e^{-2k} (2k)^{-2k} \sum_{n=0}^{\infty} n^{4k} e^{-n} \geq \frac{|x|^{4k}}{\sqrt{4\pi k}} e^{-2k} (2k)^{-2k} (2k)^{4k} e^{-2k}$$

$$\geq \frac{(2k)^{2k}}{\sqrt{4\pi k}} |x|^{2k}$$

$$\text{or } \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} \exp(2k(2\ln(2k) + \ln(|x|))) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc  $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ,  $\left| \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$ , la série  $\sum \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!} x^k$  diverge

• Pour  $x=0$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$  dans cv

donc le rayon de cv de la s.e.  $\sum \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!} x^k$  est 0

on

Merci à Paul ?

## Seconde méthode

$$\left| \frac{z^k (r-1)^k}{(2k)!} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{r}{2} \frac{z^n}{k}} \right| \geq \frac{|z|^k}{(2k)!} e^{-\frac{r}{2} \frac{|z|^k}{k}} \quad \text{tous les termes de la somme étant positifs}$$
$$\geq \frac{|z|^k}{(2k)!} e^{-\frac{r}{2} \frac{|z|^k}{k}} \geq \left( \frac{|z| \frac{r}{2} k^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}}} \right)^k \geq \left( \frac{|z| \frac{r}{2} k^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}}} \right)^k$$

$\frac{r}{2} k^{\frac{1}{2}} |z|$  et  $k$  tendent vers  $+\infty$ . ~~Donc~~ Donc, la série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k$  diverge grossièrement. Ceci étant vrai quel que soit  $a$ , la série de Taylor  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k$  diverge à un rayon de convergence nul.

Oui