

Exercice 8

$$1. \circ f = 0_{\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})} \in E \quad \text{car} \quad \forall t, |t^3 f(t)| \leq 0$$

$$\circ \text{ Soit } (\varphi, \psi) \in E^2, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2$$

$$\lambda \varphi + \mu \psi \in E \quad \text{car} \quad \lambda \varphi + \mu \psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

d'après les h. générales

$$\text{et } \forall t \in \mathbb{R}, |\lambda \varphi(t) t^3 + \mu \psi(t) t^3| \leq |\lambda| |\varphi(t) t^3| + |\mu| |\psi(t) t^3|$$

d'après l'inégalité triangulaire

$$\leq |\lambda| M + |\mu| N \in \mathbb{R}$$

$$\text{car par hyp } \int \forall t, |\varphi(t) t^3| \leq M$$

$$\exists (M, N) \in \mathbb{R}^2, \int \forall t, |\psi(t) t^3| \leq N$$

donc la fonction $t \mapsto t^3 (\varphi(t) \lambda + \mu \psi(t))$ est bornée

$$\text{donc } \boxed{\lambda \varphi + \mu \psi \in E}$$

$$2. \text{ L'intégrale Soit } X =]-\infty, +\infty[\quad \text{et} \quad T =]-\infty, +\infty[,$$

$$\forall x \in X, \forall t \in T, \quad f(x, t) = \varphi(t) e^{-i2\pi t x}$$

* Soit $t \in T$, la fonction $x \mapsto \varphi(t) e^{-i2\pi t x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur X car (1)* Soit $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est cpm et intégrable sur T car (2)* Soit $x \in X$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est cpm sur T

$$\circ \forall t \in T, \forall x \in X,$$

$$2\pi |t \varphi(t)|$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \sqrt{\frac{2\pi M}{t^2 + 1}} \quad \text{car } \exists M \in \mathbb{R}, \forall t, |\varphi(t) t^3| \leq M$$

$$\text{et } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi M}{t^2 + 1} dt \quad \text{est intég}$$

$$\text{et } t \mapsto \frac{2\pi |t \varphi(t)|}{t^2 + 1} \quad \text{est cpm et intégrable car (3)}$$

D'après le th. de dérivation sous le signe intégral
la fonction g est définie et C^1 sur $\mathbb{R}$.

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t \varphi(t) e^{-i2\pi tx} dt$$

Notation

(1) la fonction $x \mapsto \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t \varphi(t) e^{-i2\pi tx} dt \right)$ est continue sur X

(2) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall t, |t^3 \varphi(t)| \leq M$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \forall x, |f(x, t)| &= |\varphi(t) e^{-i2\pi tx}| = |t^3 \varphi(t)| \frac{1}{|t|^3} |e^{-i2\pi tx}| \\ &= |t^3 \varphi(t)| \times \frac{1}{|t|^3} \quad \text{car } |e^{-i2\pi tx}| = 1 \end{aligned}$$

$$\leq \frac{M}{|t|^3}$$

Or les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{1}{|t|^3} dt$ et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{|t|^3} dt$ convergent
d'après le critère de Riemann en $+\infty$.

D'où les intégrales $\int_1^{+\infty} |f(x, t)| dt$ et $\int_{-\infty}^{-1} |f(x, t)| dt$
convergent.

Et l'intégrale $\int_{-1}^1 |f(x, t)| dt$ n'est même pas impropre (car
c'est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment).

donc $f(t) \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur T

Révision - Thème 3

Exercice 8

(3) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \left| -i2\pi t \varphi(t) e^{-i2\pi t x} \right|$$

$$= 2\pi |t \varphi(t)|$$

$$\leq \frac{2\pi M}{t^2} \text{ si } t \neq 0.$$

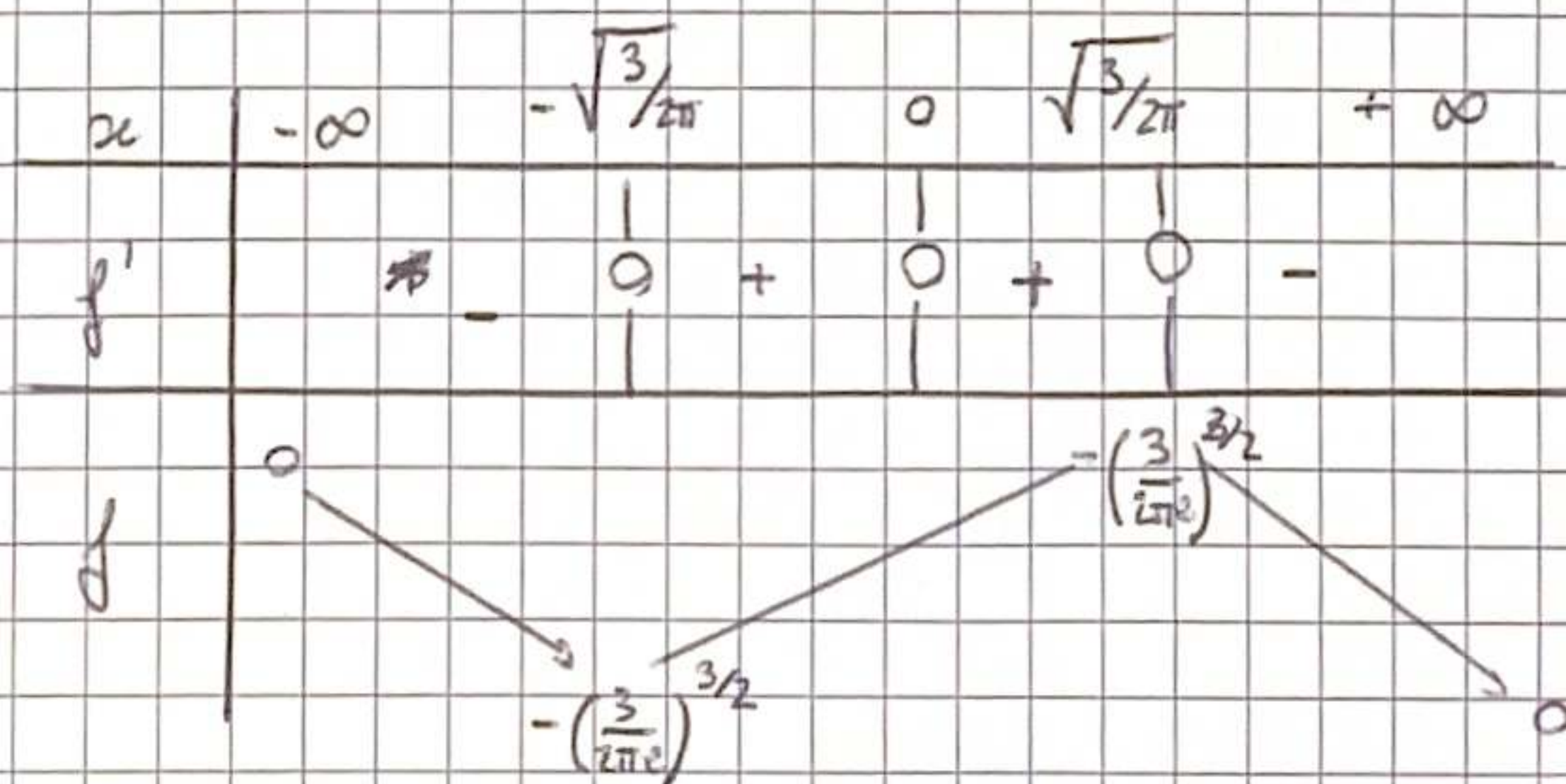
De même que précédemment, les intégrales $\int_1^{+\infty} |\partial_x f(x, t)| dt$ et $\int_{-\infty}^{-1} |\partial_x f(x, t)| dt$ convergent et l'intégrale $\int_{-1}^{+1} |\partial_x f(x, t)| dt$ n'est pas impropre.

3. a) la fonction $\varphi: t \mapsto e^{-\pi t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{C}$.

la fonction $f: t \mapsto t^3 e^{-\pi t^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\text{et } \forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = e^{-\pi t^2} t^2 (3 - 2\pi t^2)$$

d'où



car $\lim_{t \rightarrow \infty} t^3 e^{-\pi t^2} = 0$ par croissance comparée

donc $\forall t \in \mathbb{R}, |t^3 \varphi(t)| \leq \left(\frac{3}{2\pi e}\right)^{3/2}$

la fonction f est donc bornée sur $\mathbb{R}$

$$b) \quad g'(x) = -i2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi tx} dt$$

$$\text{or } i \int_{-\infty}^{+\infty} -2\pi t e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi tx} dt = i \left[\int_0^{+\infty} -2\pi t e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi tx} dt + \int_{-\infty}^0 -2\pi t e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi tx} dt \right]$$

Soit $N > 0$,

les fonctions $t \mapsto e^{-\pi t^2}$ et $t \mapsto e^{-i2\pi tx}$ sont C^1 sur $\mathbb{R}$

$$\text{d'où par IPP : } \int_0^N -2\pi t e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi tx} dt = \left[e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi tx} \right]_0^N + i2\pi \int_0^N e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi tx} dt$$

Soit $N' \leq 0$,

de même

$$\int_{N'}^0 -2\pi t e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi tx} dt \xrightarrow{N' \rightarrow -\infty} 1 + i2\pi x \int_{-\infty}^0 e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi tx} dt$$

$$\text{d'où } \forall x, g'(x) = i \left(i2\pi x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi tx} dt \right)$$

$$\forall x, g'(x) = -2\pi x g(x)$$

Autre méthode:

$\varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm \infty} 0$, d'où : $\forall \varepsilon > 0, \exists a > 0, \forall t \in \mathbb{R}, |t| > a \Rightarrow |\varphi(t)| < \varepsilon$.

On choisit $\varepsilon = 1$. Alors $\forall t \in]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[, |\varphi(t)| < 1$.

Et, sur le segment $[-a, +a]$, la fonction φ est aussi bornée car elle est continue.

Thème 3

Exercice 8

3. c)

La fonction $\varphi: t \mapsto e^{-\pi t^2}$ vérifie l'équa. diff. (*) $\Leftrightarrow \forall x, g'(x) = -2\pi x g(x)$
 car $\forall x, \varphi'(x) = -2\pi x e^{-\pi x^2} = -2\pi x \varphi(x)$

Où, ou

(*) est une équ. diff. linéaire d'ordre 1 à coefficient continu sans 2nd membre, d'où: l'ensemble des sol. de (*) est un ev de dim. 1 d'ap. la th. de Cauchy-Lipschitz. Donc

Pour tout $K \in \mathbb{R}$, $K\varphi$ est encore une solution de (*) On fait varier la constante K :

Soit $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = k(t) e^{-\pi t^2}$

Alors $\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = k'(t) e^{-\pi t^2} - k(t) 2\pi t e^{-\pi t^2}$

d'où (*) $\Leftrightarrow k'(t) e^{-\pi t^2} - k(t) 2\pi t e^{-\pi t^2} = -2\pi t k(t) e^{-\pi t^2}$

$\Leftrightarrow k'(t) e^{-\pi t^2} = 0$

$\Leftrightarrow k'(t) = 0$

(*) $\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, g(t) = K e^{-\pi t^2}$ ou

or $g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-\pi t^2} dt + \int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt$ car l'intégrale cv

or $\int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ en posant le c.v. $t = \frac{u}{\sqrt{\pi}}$ C^1 et str. croissant

$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}$ car $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

de même $\int_{-\infty}^0 e^{-\pi t^2} dt = - \int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt$ en posant le c.v. $t = -u$ C^1 et str. décroissant

$= \int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt = \frac{1}{2}$

d'où $g(0) = 1$ or $g(0) = K$ donc $K = 1$

finalement

$$\forall t, g(t) = e^{-\pi t^2} = \varphi(t)$$