Corrigé de la feuille de T.D. n° 16

Équations différentielles

23 mars 2025

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles

1. $x'' - 3x' + 2x = te^{2t}$ et $x'' - 2\sqrt{2}x' + 2x = 6$;
2. $(t^2+1)^2x'' + 2t(t^2+1)x' + x = 0$ en cherchant d'abord une solution de la forme $(1+t^2)^\alpha$.

---

1. (a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre. On sait que sa solution générale est de la forme : $x = \psi + K\varphi_1 + L\varphi_2$, où $K\varphi_1 + L\varphi_2$ est la solution générale de l'équation homogène et ψ est une solution particulière de l'équation avec second membre.
Commençons par résoudre l'équation homogène
$$x'' - 3x' + 2x = 0. \quad (E_0)$$
Cette équation différentielle est à coefficients constants ; son équation caractéristique est $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ et possède deux racines distinctes : 1 et 2. D'où la solution générale de (E_0) est : $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = Ke^t + Le^{2t}$. Pour résoudre (E) on fait varier la constante L. On obtient alors l'équation :
$$\ell''(t)e^{2t} + 4\ell'(t)e^{2t} - 3\ell'(t)e^{2t} = te^{2t} \iff \ell''(t) + \ell'(t) = t$$
Une solution particulière de cette équation différentielle est $\ell : t \mapsto \ell(t) = \frac{t^2}{2} - t$.
Première rédac (bof) — Donc la solution générale de l'équation (E) est :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = (\frac{t^2}{2} - t)e^{2t} + Ke^t + Le^{2t},$$
où $(K,L) \in \mathbb{R}^2$. Elle est bien de la forme : $x = \psi + K\varphi_1 + L\varphi_2$
Deuxième rédac (mieux) — Donc x est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E) si, et seulement si,
$$\exists (K,L) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = (\frac{t^2}{2} - t)e^{2t} + Ke^t + Le^{2t}.$$

   (b) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre. On sait que sa solution générale est de la forme : $x = \psi + K\varphi_1 + L\varphi_2$, où $K\varphi_1 + L\varphi_2$ est la solution générale de l'équation homogène et ψ est une solution particulière de l'équation avec second membre.
Commençons par résoudre l'équation homogène
$$x'' - 2\sqrt{2}x' + 2x = 0. \quad (E_0)$$
Cette équation différentielle est à coefficients constants ; son équation caractéristique est $\lambda^2 - 2\sqrt{2}\lambda + 2 = 0$ et possède une racine double égale à $\sqrt{2}$. D'où la solution générale de (E_0) est : $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = (K+Lt)e^{t\sqrt{2}}$. Puis on remarque que $x : t \mapsto x(t) = 3$ est une solution particulière de (E).
Première rédac (bof) — Donc la solution générale de (E) s'écrit : $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = 3 + (K+Lt))e^{\sqrt{2}t}$, où $(K,L) \in \mathbb{R}^2$.
Deuxième rédac (mieux) — Donc x est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E) si, et seulement si,
$$\exists (K,L) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ 3 + (K+Lt))e^{\sqrt{2}t}.$$

2. Commençons par chercher une solution de la forme $x(t) = (1+t^2)^\alpha$. On obtient $x'(t) = 2\alpha t(1+t^2)^{\alpha-1}$ et $x''(t) = 2\alpha(1+t^2)^{\alpha-1} + 4\alpha(\alpha-1)t^2(1+t^2)^{\alpha-2}$. C'est une solution si, et seulement si,
$$\begin{aligned}
(t^2+1)^2(2\alpha(1+t^2)^{\alpha-1} + 4\alpha(\alpha-1)t^2(1+t^2)^{\alpha-2}) \\
+2t(t^2+1)(2\alpha t(1+t^2)^{\alpha-1}) + (1+t^2)^\alpha &= 0 \\
2\alpha(1+t^2)^{\alpha+1} + (4t^2\alpha + 1 + 4\alpha(\alpha-1)t^2)(1+t^2)^\alpha &= 0 \\
(2\alpha(1+2\alpha)t^2 + (2\alpha+1))(1+t^2)^\alpha &= 0 \\
\alpha = -\tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc $t \mapsto \frac{C}{\sqrt{1+t^2}}$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E). Et cette solution ne s'annule pas, on peut donc faire varier la constante : (E) est équivalent à

$$\begin{array}{rcl} \frac{(t^2+1)^2}{\sqrt{t^2+1}}\left(C''(t) - \frac{2tC'(t)}{1+t^2}\right) + 2t(t^2+1)\frac{C'}{\sqrt{1+t^2}} & = & 0 \\ \sqrt{t^2+1}(t^2+1)C''(t) & = & 0 \\ C''(t) & = & 0 \\ C(t) & = & at+b. \end{array}$$

D'où la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) est $t \mapsto \frac{at+b}{\sqrt{1+t^2}}$.

Exercice 2 (séries entières)**.** On note F l'application

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\,dt.$$

1. Montrer que la fonction F est une solution, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'(x) = -2xy(x) + 1.$$

2. En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E).
3. Montrer que la fonction qui, à tout réel x, associe $\int_0^x e^{t^2}\,dt$ est développable en série entière sur $]-\infty,+\infty[$ et déterminer les coefficients de ce développement.
4. Montrer que F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et déterminer une relation de récurrence vérifiée par les coefficients a_n de ce développement.
5. Pour tout entier naturel p, exprimer a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p.
6. En déduire, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}.$$

---

1. La fonction F est un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:
   - la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est dérivable car composée de fonctions dérivables et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{d}{dx}e^{-x^2} = -2x \cdot e^{-x^2}$;
   - la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ est une primitive de la fonction continue $t \mapsto e^{t^2}$ et $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt = e^{x^2}$.

   D'où F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = -2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt + e^{-x^2}e^{x^2} = -2xF(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est donc une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

2. La solution générale de l'équation sans second membre $y' = -2xy$ s'écrit : $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = K \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$. Une solution particulière de l'équation avec second membre est F. Donc

$$\boxed{y \text{ est une solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ si, et seulement si, il existe un réel } K \text{ tel que : } \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = K \cdot \mathrm{e}^{-x^2} + e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt.}$$

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^t = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$. D'où : $\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{t^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!}$. On peut intégrer terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x e^{t^2}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x \frac{t^{2k}}{k!}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

4. La fonction F est développable en série entière car c'est le produit des deux fonctions développables en série entière. Ces deux séries entières ont un rayon de convergence infini, donc leur produit aussi. Il existe donc une suite (a_n) telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

$$F \text{ est une solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (E) \quad \text{, d'où :} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = -2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n = -2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + 1$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \forall n \geq 1,\ (n+1)a_{n+1} = -2a_{n-1} \end{cases} \quad \text{par unicité du DSE.}$$

5. $F(0) = 0$, d'où $a_0 = 0$ et, d'après la relation de récurrence, $a_{2p} = 0$ pour tout entier naturel p.
D'après la relation de récurrence, pour tout entier naturel p,
$$a_{2p+1} = a_1 \times \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{5} \times \cdots \times \frac{-2}{2p+1} = \frac{(-1)^p \cdot 4^p \cdot p!}{(2p+1)!}.$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$: $F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$, d'où $\sum_{p=0}^{\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)}$. D'après le produit de Cauchy, $a_{2p+1} = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!(2k+1)} \frac{(-1)^{p-k}}{(p-k)!}$. Donc
$$\sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{p}{k} = \frac{4^p}{(2p+1)\binom{2p}{p}}.$$

Exercice 3 (intégrales impropres & variation de la constante – oral CCP PC 2010)**.**

Soient l'équation différentielle (E) : $y' - y = e^{-x^2}$ et la fonction $u\colon x \mapsto \int_0^x e^{-t^2-t}\, dt$.

1. Montrer que u possède des limites finies quand x tend vers $\pm\infty$.
2. Exprimer les solutions de (E) en fonction de u.
3. Montrer que les solutions de (E) ont toutes pour limite zéro en $-\infty$.
4. Montrer qu'il existe une unique solution de (E) qui a pour limite zéro en $+\infty$.

---

1. Par croissances comparées, $t^2 e^{-t^2-t}$ tend vers zéro quand t tend vers $\pm\infty$, donc u possède des limites finies en $\pm\infty$.
2. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions proportionnelles à l'exponentielle. La méthode de variation de la constante conduit à $k'(x)e^x = e^{-x^2}$, et on choisit $k(x) = u(x) = \int_0^x e^{-t^2-t}\, dt$. Finalement, les solutions de (E) sont les fonctions telles que
$$\exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = e^x(k + u(x)).$$
3. Comme $k + u(x)$ admet une limite finie en $-\infty$, $y(x) = e^x(k + u(x))$ tend vers zéro quand x tend vers $-\infty$.
4. Analyse : Pour que $y(x)$ puisse tendre vers zéro quand x tend vers $+\infty$, il faut que $k = -\lim_{+\infty} u(x)$.
Synthèse : Dans ce cas
$$|y(x)| = \left| -e^x \int_x^{+\infty} e^{-t^2-t}\, dt \right| = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t^2-t}\, dt \leqslant e^x \int_x^{+\infty} e^{-t^2-x}\, dt = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt.$$
La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$, l'intégrale ci-dessus tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$. Il existe donc bien une, et une seule, solution de (E) de limite nulle en $+\infty$.

Exercice 4 (diagonalisation & variation des constantes)**.** Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ du système différentiel :

$$\begin{cases} x' = y + z + e^t \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x' = y + z + e^t \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{array}\right. \iff X' = AX + B(t), \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'un système linéaire de 3 équations différentielles avec second membre. On sait que la solution générale est de la forme $X = K\Phi_1 + L\Phi_2 + M\Phi_3 + \Psi$, où Ψ est une solution particulière de l'équation avec second membre et (Φ_1, Φ_2, Φ_3) est une base de l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre.

On essaie de diagonaliser la matrice A pour découpler les équations. Le polynôme caractéristique de la matrice A est :

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 1 & \lambda+2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ \lambda-2 & \lambda-2 & -1 \\ \lambda-2 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)(\lambda-1)\lambda. \end{aligned}$$

D'où $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1, 2\}$. La matrice A est de taille 3×3 et possède 3 valeurs propres distinctes deux à deux, donc elle est diagonalisable.

Pour $\lambda = 0$:

$$AX = \lambda X \iff \left\{\begin{array}{l} y + z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{array}\right. \iff X = zV_1 \quad \text{où } V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

D'où $SEP(0) = \mathrm{Vect}(V_1)$.

De même, $SEP(1) = \mathrm{Vect}(V_2)$ et $SEP(2) = \mathrm{Vect}(V_3)$, où $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

La solution générale du système homogène s'écrit donc :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = K \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + Le^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + Me^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On fait varier ces 3 constantes :

$$X' = AX + B(t) \iff \left\{\begin{array}{r} k' + m'e^{2t} = e^t \\ k' + \ell'e^t + m'e^{2t} = 0 \\ -k' - \ell'e^t + m'e^{2t} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} k' = e^t \\ \ell' = -1 \\ m' = 0 \end{array}\right. \iff \begin{cases} k(t) = e^t + K \\ \ell(t) = -t + L \\ m(t) = M \end{cases}$$

Donc X est une solution de $X' = AX + B(t)$ si, et seulement si, il existe $(K, L, M) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ (1-t)e^t \\ (t-1)e^t \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + Le^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + Me^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. 1. Soient deux réels $\omega > 0$ et $V > 0$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les deux systèmes d'équations différentielles

$$(E) \begin{cases} x' = -\omega \cdot y \\ y' = +\omega \cdot x \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (F) \begin{cases} x' = -\omega \cdot y \\ y' = +\omega \cdot x \\ z' = V \end{cases}.$$

2. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Soit $\vec{\omega}$ un vecteur non nul de E. On définit les deux fonctions
$$f : E \to \mathbb{R},\ \vec{x} \mapsto \|\vec{x}\|^2 \quad \text{et} \quad g : E \to \mathbb{R},\ \vec{x} \mapsto \langle \vec{\omega}, \vec{x} \rangle.$$
Soit $M : I \to E,\ t \mapsto M(t)$ une solution sur I de l'équation différentielle $\vec{x}'(t) = \vec{\omega} \wedge \vec{x}(t)$. Montrer les deux fonctions $f \circ M$ et $g \circ M$ sont constantes sur I. Qu'en déduire ?

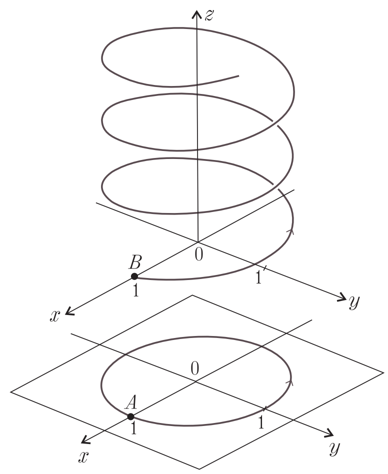

FIGURE 1 – Deux trajectoires : un cercle et une hélice

3. Soit un entier n impair. Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$: $A^T = -A$.
   (a) Montrer que A n'est pas inversible et que, pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T AX = 0$.
   (b) Soit $M : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ t \mapsto M(t)$ une solution sur I de l'équation différentielle $X'(t) = A \cdot X(t)$. Montrer qu'il existe un vecteur colonne non nul $\Omega \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que les fonctions

$$t \mapsto M(t)^T \cdot M(t) \quad \text{et} \quad t \mapsto \Omega^T \cdot M(t)$$

   sont constantes sur I.

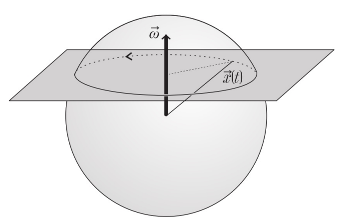

FIGURE 2 – Une trajectoire à l'intersection d'une sphère et d'un plan

Exercice 6. Soient les équations différentielles

$$(E) \quad x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x) \qquad \text{et} \qquad (E_0) \quad x^2y'' + 4xy' + 2y = 0.$$

1. Déterminer les solutions de la forme $x \mapsto x^\alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$) de (E_0).
2. En déduire la solution générale sur $]0, +\infty[$ de (E_0).
3. Rappeler le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$ ainsi que le rayon de convergence de cette série entiére.
4. (a) Rechercher le développement en série entiére d'une solution f de (E) et calculer le rayon de convergence R de cette série entière.

(b) Exprimer $f(x)$ pour tout $x \in]-R, 0[\cup]0, +R[$ à l'aide de fonctions usuelles.

5. Quelle est la solution générale de l'équation (E) sur l'intervalle $]0, 1[$?

---

1. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est une solution de l'équation $(E_0)\quad x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$ si, et seulement si, $x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + 4x\alpha x^{\alpha-1} + 2x^\alpha = 0 \iff \left(\alpha^2 + 3\alpha + 2\right)x^\alpha = 0 \iff \alpha \in \{-2; -1\}$.
2. L'ensemble des solutions sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de l'équation (E_0) est un espace vectoriel de dimension 2 car (E_0) est une équation différentielle linéaire sans second membre d'ordre 2. Donc

$$\boxed{y \text{ est une solution }]0,+\infty[\text{ de } (E_0) \textit{ ssi } \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in]0,+\infty[,\ y(x) = A\cdot\frac{1}{x^2} + B\cdot\frac{1}{x}.}$$

3. $\forall x \in]-1, +1[,\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ et le rayon de convergence est 1.
4. (a) Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ et $\forall x \in]-R, +R[,\ y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\iff \quad x^2\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-2} + 4x\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1} + 2\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\\
&\iff \quad 2a_0 + 6a_1 + \sum_{k=2}^{\infty}(k^2+3k+2)a_kx^k = x + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} \text{ (par unicité du DSE)}\\
&\iff \quad \begin{cases} a_0 = 0\\ 6a_1 = 1\\ \forall k \geq 2,\ (k+1)(k+2)a_k = (-1)^{k-1}\dfrac{1}{k}\end{cases}\\
&\iff \quad \begin{cases} a_0 = 0\\ \forall k \geq 1,\ a_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)(k+2)}\end{cases}\\
&\iff \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)(k+2)}x^k.
\end{aligned}$$

Le rayon de convergence de cette série entière est $R = 1$ car $\dfrac{|a_{k+1}x^{k+1}|}{|a_kx^k|} = \dfrac{k(k+1)(k+2)}{(k+1)(k+2)(k+3)}|x| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} |x|$.

(b) $\sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1} = \dfrac{1}{1-x}$. Intégrons : $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^k}{k} = -\ln(1-x) + \text{cte}$ et la constante d'intégration est nulle (tester avec $x = 0$). Intégrons une deuxième fois : $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^{k+1}}{k(k+1)} = (1-x)\ln(1-x) + x + \text{cte}$ en intégrant par partie et la constante d'intégration est nulle (tester avec $x = 0$). Intégrons une troisième fois : $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^{k+2}}{k(k+1)(k+2)} = -\dfrac{(x-1)^2}{2}\ln(1-x) + \dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{x^2}{2} + \text{cte}$ en intégrant par partie et la constante d'intégration vaut $-\dfrac{1}{4}$ (tester avec $x = 0$). À chaque étape, on a intégré terme à terme sans changer le rayon de convergence, d'où

$$\forall x \in]-1, +1[,\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k+2}}{k(k+1)(k+2)} = -\frac{(x-1)^2}{2}\ln(1-x) + \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}.$$

Divisons par x^2 et remplaçons x par $-x$:

$$\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +1[,\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^kx^k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{-\dfrac{(x+1)^2}{2}\ln(1+x) + \dfrac{(x+1)^2}{4} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{4}}{x^2}.$$

Multiplions par -1 :

$$\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +1[,\ f(x) = \frac{\dfrac{(x+1)^2}{2}\ln(1+x) - \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x}{x^2}.$$

5. La solution générale y de l'équation (E) sur l'intervalle $]0,1[$ est égale à la solution générale y_0 de (E_0) plus une solution particulière f de (E). Donc

$$\boxed{y \text{ est une solution }]0,+\infty[\text{ de } (E) \textit{ ssi } \exists (A,B)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in]0,+1[,\ y(x) = A\cdot\frac{1}{x^2} + B\cdot\frac{1}{x} + \frac{\frac{(x+1)^2}{2}\ln(1+x) - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x}{x^2}.}$$

Exercice 7. Soient un intervalle I de $\mathbb{R}$, deux fonctions continues $a : I\to\mathbb{R}$ et $b : I\to\mathbb{R}$ et l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 sans second membre

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0.$$

Soient $x_1 : I\to\mathbb{R}$ et $x_2 : I\to\mathbb{R}$ deux solutions sur I de cette équation. La fonction

$$W : I\to\mathbb{R},\ t\mapsto \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t)\end{vmatrix}$$

est appelée le **wronskien** de x_1 et x_2.

1. Montrer que W est dérivable et que, pour tout $t\in I$,
$$W'(t) = -a(t)W(t).$$
2. Montrer que : si les solutions x_1 et x_2 sont linéairement indépendantes, alors leur wronskien ne s'annule jamais.
3. Montrer que, si x_1 ne s'annule pas, alors
$$\forall t\in I, \left(\frac{x_2}{x_1}\right)'(t) = \frac{W(t)}{x_1^2(t)}.$$
4. Soient $x_1 : I\to\mathbb{R}$ et $x_2 : I\to\mathbb{R}$ deux solutions linéairement indépendantes. Montrer que x_1 et x_2 n'ont pas de racine commune. Et que, entre deux racines distinctes de x_2 (si elles existent), x_1 possède au moins une racine.
5. On suppose connue une solution $x_1 : I\to\mathbb{R}$ ne s'annulant pas. En utilisant le wronskien, déterminer une solution $x_2 : I\to\mathbb{R}$ linéairement indépendante de x_1.

---

1. La fonction W est dérivable car les fonctions x_1 et x_2 sont deux fois dérivables. Et $W' = (x_1x_2' - x_2x_1')' = x_1x_2'' - x_2x_1'' = x_1'(-ax_2' - bx_2) - x_2(-ax_1' - bx_1) = -aW$.
2. D'après le théorème de Cauchy & Lipschitz, si les vecteurs $(x_1(t), x_1'(t))$ et $(x_2(t), x_2'(t))$ sont liés à un instant t, alors ils le sont à tout instant. En contraposant : si les solutions x_1 et x_2 sont libres alors les vecteurs $(x_1(t), x_1'(t))$ sont libres à tout instant t, par suite $W(t)$ est non nul pour tout $t\in I$.
   Autre méthode — La fonction W est une solution sur I de l'équation différentielle $W'(t) = -a(t)W(t)$, qu'on résout : il existe une constante K telle que, pour tout $t\in I$, $W(t) = K\mathrm{e}^{-A(t)}$, où A est une primitive de a. Si les solutions x_1 et x_2 sont libres, alors il existe $t\in I$ tel que $W(t)\neq 0$. Par suite, la constante K n'est pas nulle. Et W ne s'annule donc jamais.
3. Pour tout $t\in I,\ x_1(t)\neq 0$, d'où $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)'(t) = \frac{x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t)}{x_1^2(t)} = \frac{W(t)}{x_1^2(t)}$.
4. Supposons que α est une racine de x_2 : $W(\alpha) = x_1(\alpha)x_2'(\alpha) - x_2(\alpha)x_1'(\alpha)\neq 0$, d'où $x_1(\alpha)\neq 0$ si $x_2(\alpha) = 0$.
   Supposons que α et $\beta > \alpha$ sont deux racines de x_2. Si x_1 ne s'annule pas sur $]\alpha,\beta[$, alors la fonction $\frac{x_2}{x_1}$ est définie sur $[\alpha,\beta]$, y est dérivable et s'annule en α et β.
   D'après le théorème de Rolle, $\exists\gamma\in]\alpha,\beta[$, $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)'(\gamma) = 0$. C'est absurde car $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)'(\gamma) = \frac{W(\gamma)}{x_1^2(\gamma)}$ d'après la question précédente. Donc x_1 s'annule au moins une fois sur $]\alpha,\beta[$.
5. Analyse : si $x_2 = yx_1$ est une solution de l'équation différentielle, alors, pour tout $t\in I$, $y'(t) = \frac{W(t)}{x_1^2(t)}$ d'après la question 3. Or la question (1) permet de calculer le wronskien : il existe une constante $K\in\mathbb{R}$ telle que, pour tout $t\in I$, $W(t) = K\cdot\mathrm{e}^{-A(t)}$, où A est primitive de la fonction a. Puis on détermine y en résolvant l'équation différentielle $y'(t) = \frac{W(t)}{x_1^2(t)}$.
   Synthèse : on choisit une valeur de K non nulle. La fonction x_2 est alors linéairement indépendante de x_1 car la fonction y n'est pas constante car sa dérivée ne s'annule pas car $W(t) = K\cdot\mathrm{e}^{-A(t)}$ ne s'annule pas. Et on vérifie en dérivant que x_2 est bien une solution de l'équation différentielle.