Fonctions de plusieurs variables

1 Continuité

Exercice 1. ♡ Déterminer si les fonctions suivantes peuvent être prolongées par continuité en l'origine :

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2+xy}, f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^3}, f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, f(x,y)=\frac{x^7+x^4y+x^3y}{x^6+x^3y+y^3}.$$

Solution **1.** .

1. $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2+xy}$.
   En passant en coordonnées polaires, tout point $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ *est représenté par* $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ *avec* $r=\sqrt{x^2+y^2}$. *Alors* $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2+xy}=\frac{r^3\cos\theta\sin\theta}{r^2(1+\cos\theta\sin\theta)}=r\frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\cos\theta\sin\theta}$.
   On a $\cos\theta\sin\theta=\frac{\sin(2\theta)}{2}$ *d'où* $|\cos\theta\sin\theta|\le\frac12$ *et par suite*
   $$\left|\frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\cos\theta\sin\theta}\right|\le\left|\frac{\cos\theta\sin\theta}{1-|\cos\theta\sin\theta|}\right|\le\frac{1}{1-\frac12}=2.$$
   Alors $\lim_{r\to0}r\left|\frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\cos\theta\sin\theta}\right|\le\lim_{r\to0}2r=0$ *on en déduit que*
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2+xy}=\lim_{r\to0}r\frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\cos\theta\sin\theta}=0$$
   donc f *admet un prolongement par continuité en* $(0,0)$ *par* $f(0,0)=0$.
2. $f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^3}$.
   En considérant les chemins $x=0$ *puis* $y=0$ *on aura,* $\lim_{x\to0}f(x,0)=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to0}x=0$ *et* $\lim_{y\to0}f(0,y)=\lim_{y\to0}\frac{y^3}{y^3}=\lim_{y\to0}1=1$, *comme ces deux limites sont différentes, la fonction* $f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^3}$ *n'a pas de limite en* $(0,0)$, *par suite elle n'admet pas de prolongement par continuité en l'origine.*
3. $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
   On a $\lim_{x\to0}f(x,x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-x^2}{x^2+x^2}=\lim_{x\to0}0=0$ *et* $\lim_{x\to0}f(x,0)=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{y\to0}1=1$, *comme ces deux limites sont différentes, la fonction* $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ *n'a pas de limite en* $(0,0)$, *par suite elle n'admet pas de prolongement par continuité en en l'origine.*
4. $f(x,y)=\frac{x^7+x^4y+x^3y}{x^6+x^3y+y^3}$.
   En considérant les chemins $x=0$ *puis la parabole* $y=x^2$, *on a*
   $$\lim_{x\to0}f(x,0)=\lim_{x\to0}\frac{x^7}{x^6}=\lim_{x\to0}x=0$$
   et
   $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x^2}}f(x,y)=\lim_{x\to0}f\left(x,x^2\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^7+x^6+x^5}{x^6+x^5+x^6}=\lim_{x\to0}\frac{x^5\left(x^2+x+1\right)}{x^5(2x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+x+1}{2x+1}=1,$$
   comme ces deux limites sont différentes, la fonction $f(x,y)=\frac{x^7+x^4y+x^3y}{x^6+x^3y+y^3}$ *n'a pas de limite en* $(0,0)$, *par suite elle n'admet pas de prolongement par continuité en l'origine.*

Exercice 2. On considère les fonctions définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$f(x,y) = \sup\left(\frac{x}{2+|y|}, \frac{y}{1+|x|}\right); g(x,y) = \inf\left(\frac{x^4 y}{|x|+4y^2}, \frac{xy^4}{|y|+4x^2}\right)$$

Sont elles continues ?

Solution **2.** . *On peut exprimer les fonctions sup et inf de deux fonction F et G par les formules*

$$\begin{aligned}\sup(F,G)(x,y) &= \tfrac{F(x,y)+G(x,y)}{2} + \tfrac{|F(x,y)-G(x)|}{2}\\ \inf(F,G)(x,y) &= \tfrac{F(x,y)+G(x,y)}{2} - \tfrac{|F(x,y)-G(x,y)|}{2}\end{aligned}$$

On en déduit que si F et G sont continues alors les fonctions $\sup(F,G)$ et $\inf(F,G)$ sont continues.

1. *les fonctions $\frac{x}{2+|y|}$ et $\frac{y}{1+|x|}$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2$ comme quotients de fonctions continues, d'où $f(x,y) = \sup\left(\frac{x}{2+|y|}, \frac{y}{1+|x|}\right)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *les fonctions $\frac{x^4 y}{|x|+4y^2}$ et $\frac{xy^4}{|y|+4x^2}$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2$ comme quotients de fonctions continues, d'où $g(x,y) = \inf\left(\frac{x^4 y}{|x|+4y^2}, \frac{xy^4}{|y|+4x^2}\right)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.*

Exercice 3. * Soit $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|}$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
Montrer que la fonction f est continue mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Les dérivées partielles $\partial_1 f(0,0)$ et $\partial_2 f(0,0)$ existent-elles ?

Solution **3.** . *La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.*
Et en $(0,0)$? $|\sin(u)| \leq |u|$, d'où $|f(x,y)| \leq \dfrac{|xy|}{|x|+|y|} \leq \dfrac{|xy|}{\max(|x|,|y|)} = \min(|x|,|y|) \leq \|(x,y)\|$. Donc

$$0 \leq |f(x,y)| \leq \frac{|xy|}{|x|+|y|} \leq \|(x,y)\| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.$$

Par encadrement : $f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$. Or $f(0,0) = 0$. Donc f est continue en $(0,0)$.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Et en $(0,0)$?
Soient $x > 0$ et $y > 0$: $\partial_1 f(x,y) = \dfrac{y\cos(xy)(x+y) - \sin(xy)}{(x+y)^2}$.
On en déduit $\partial_1 f(x,x) = \dfrac{2x^2\cos(x^2) - \sin(x^2)}{(2x)^2} = \dfrac{2x^2(1+\varepsilon(x)) - (x^2 + x^2\varepsilon(x^2))}{(2x)^2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$.
D'autre part, si $h \neq 0$, $\dfrac{f(x+h,0) - f(0,0)}{h-0} = 0$, donc $\partial_1 f(x,0) = 0 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Donc la dérivée partielle $\partial_1 f$ n'a pas de limite en $(0,0)$ et donc la fonctions $\partial_1 f$ n'est pas continue en $(0,0)$. On a montré que f n'était pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Remarquez qu'en $(x,0)$ ou en $(0,y)$ avec $x,\ y \neq 0$, la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$.

Cependant, $\dfrac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \dfrac{\frac{\sin(h\cdot 0)}{|h|+0} - 0}{h} = 0 \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $\partial_1 f(0,0)$ existe et $\partial_1 f(0,0) = 0$.

2 Fonctions différentiables

Exercice 4. * Soit une application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Montrer que : si f est différentiable en $\vec{a}$, alors l'application

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \vec{x} \mapsto \vec{x} \wedge f(\vec{x})$$

est aussi différentiable en $\vec{a}$. Calculer $dg_{\vec{a}}(\vec{h})$ pour tout $\vec{h} \in \mathbb{R}^3$.

Solution **4.** . *On rappelle que* $\|\vec{a}\wedge\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot|\sin(\vec{a},\vec{b})| \leq \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|$.
Par définition, $g(\vec{a}+\vec{h}) = (\vec{a}+\vec{h})\wedge f(\vec{a}+\vec{h})$. *Mais* $f(\vec{a}+\vec{h}) = f(\vec{a}) + df_{\vec{a}}(\vec{h}) + o(\|\vec{h}\|)$, *donc*

$$g(\vec{a}+\vec{h}) = \vec{a}\wedge f(\vec{a}) + \underbrace{\vec{h}\wedge f(\vec{a}) + \vec{a}\wedge df_{\vec{a}}(\vec{h})}_{L(\vec{h})} + \underbrace{\vec{h}\wedge df_{\vec{a}}(\vec{h}) + (\vec{a}+\vec{h})\wedge o(\|\vec{h}\|)}_{R(\vec{h})}.$$

Le reste

$$R(\vec{h}) = \vec{h}\wedge df_{\vec{a}}(\vec{h}) + (\vec{a}+\vec{h})\wedge\|\vec{h}\|\varepsilon(\vec{h}) = \|\vec{h}\|\left(\vec{h}\wedge df_a(\vec{h}/\|\vec{h}\|) + (\vec{a}+\vec{h})\wedge\varepsilon(\vec{h})\right)$$

est un $o(\|\vec{h}\|)$ *car*

$$\|\vec{h}\wedge df_a(\vec{h}/\|\vec{h}\|) + (\vec{a}+\vec{h})\wedge\varepsilon(\vec{h})\| \leq \|\vec{h}\wedge df_a(\vec{h}/\|\vec{h}\|)\| + \|(\vec{a}+\vec{h})\wedge\varepsilon(\vec{h})\| \leq \|\vec{h}\|\cdot|||df_a||| + \|\vec{a}+\vec{h}\|\cdot\|\varepsilon(\vec{h})\|$$

tend vers 0.
Et $L : \vec{h}\mapsto\vec{h}\wedge f(\vec{a})+\vec{a}\wedge df_{\vec{a}}(\vec{h})$ *est linéaire, donc g est différentiable en* $\vec{a}$ *et* $dg_{\vec{a}}(\vec{h}) = \vec{h}\wedge f(\vec{a})+\vec{a}\wedge df_{\vec{a}}(\vec{h})$.

Exercice 5. * Montrer que l'application $M \mapsto M^2 + \operatorname{tr}\left(M^3\right) I_n$ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $\forall (M,H)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, df(M)(H) = MH + HM + 3\operatorname{tr}\left(M^2H\right) I_n$.

Solution **5.** . *On pose* $f_1(M) = M^2$. *On a* $f_1(M+H) = f_1(M) + MH + HM + H^2$. *L'application* $H\mapsto MH+HM$ *est linéaire et* H^2 *est négligeable devant H au voisinage de 0 , donc* f_1 *est différentiable et* $df_1(M)(H) = MH + HM$. *On pose* $f_2(M) = \operatorname{tr}\left(M^3\right) I_n$. *En développant* $(M+H)^3$, *on obtient :*

$$(M+H)^3 = M^3 + M^2H + MHM + HM^2 + H^2M + HMH + MH^2 + H^3.$$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *d'une norme subordonnée à une norme de* $\mathbb{R}^n$, *de façon à avoir l'inégalité* $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$ *pour toutes matrices A et B. On sait que la trace est linéaire, donc continue, donc il existe* $K > 0$ *tel que* $|\operatorname{tr}(A)| \leqslant K\|A\|$ *pour tout* $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *On sait également que* $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, *donc on obtient facilement que*

$$\left|\operatorname{tr}\left(H^2M + HMH + MH^2 + H^3\right)\right| \leqslant K\|H\|^2(3\|M\| + \|H\|),$$

d'où $\operatorname{tr}\left((M+H)^3\right) = \operatorname{tr}\left(M^3\right) + 3\operatorname{tr}\left(M^2H\right) + o(\|H\|)$, *donc* f_2 *est différentiable et* $df_2(M)(H) = 3\operatorname{tr}\left(M^2H\right) I_n$. *Par linéarité, on en déduit que f est différentiable et*

$$\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), df(M)(H) = MH + HM + 3\operatorname{tr}\left(M^2H\right) I_n$$

Exercice 6. ♡♡*

1. Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(A,B)\mapsto AB$. Vérifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.
2. Soit $\psi : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$, $A\mapsto A^{-1}$. Vérifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.

Solution **6.** .

1. *Le produit matricielle correspond à des fonctions polynômiales en chaque coordonnées donc est* $\rfloor^1$. *On calcule* $(A+H)(B+K) = AB + AK + HB + HK$ *dont on déduit que que la différentielle de* φ *est* $(H,K)\mapsto HB + AK$.
2. *L'application est bien défnie sur l'ouvert* $GL_n(\mathbb{R})$ *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et s'écrit chaque entrée de* A^{-1} *est fonction rationnelle des coefficients de A.*
   Soit $A \overset{(Id,\psi)}{\mapsto} (A, A^{-1}) \overset{\varphi}{\mapsto} A^{-1}$ ψ *qui est différentiable de différentielle l'application nulle, mais la propriété de compostion nous dit que*

   $$d(\varphi\circ f)(A)(H) = d\varphi(A,A^{-1})(dId(A)(H), d\psi(A)(H)) = Ad\psi(A)(H) + HA^{-1} = 0$$

   dont on déduit que $d\psi A(H) = -A^{-1}HA^{-1}$

Exercice 7. ♡** On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, g_k l'application de E dans E définie par $M \mapsto M^k$ et f l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui associe à toute matrice son déterminant. Si $M \in E$ et $i \in [\![1, n]\!]$, on note M_i la i-ème colonne de M considérée comme un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

1. F et G étant deux espaces vectoriels de dimensions finies, donner la définition de la différentiabilité d'une application f de F vers G en un point a d'un ouvert U de F et vérifier que toute application linéaire de F vers G est différentiable en tout point de F et donner sa différentielle.
2. Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, g_k est différentiable puis déterminer sa différentielle .
3. Montrer que l'application f est de classe $\mathcal{C}^1$.
4. Soient $(A, H) \in E \times E$; démontrer que f est différentiable sur E et, en écrivant $\det(A + H)$ sous la forme $\det(A_1 + H_1, \cdots, A_n + H_n)$, exprimer le gradient de f en A en fonction de la comatrice de A. Quels sont les points critiques de l'application det dans E ? (les points critiques sont les points où le vecteur gradient est le vecteur nul.)

Solution **7.** **.**

1. *Cours : on écrit $f(x + h) = f(x) + f(h)$ qui montre que f est différentiable en x de différentielle en x f. L'application $x \mapsto f$ est une application constante, donc continue.*
2. *On raisonne par récurrence sur k.*

   On note $\mathcal{P}(k) =$"f_k est différentiable sur E et $\forall (X, H) \in E \times E$, $d_X f_k(H) = \sum_{i=0}^{k-1} X^{k-1-i} H X^i$ ".

   Initialisation : $\mathcal{P}(1)$ est vraie d'après la question précédente (application linéaire) et $d_X f_1 = id_E$.
   Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un entier $k \geq 1$ quelconque et fixé. On écrit alors :

$$\begin{aligned} f_{k+1}(X+H) &= (X+H) f_k(X+H) \\ &= (X+H)\left(X^k + \sum_{i=0}^{k-1} X^{k-1-i} H X^i + 0(\|H\|)\right) \\ &= X^{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} X^{k-i} H X^i + H X^k + 0(\|H\|) \\ &= X^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} X^{k-i} H X^i + 0(\|H\|) \end{aligned}$$

   d'où le résultat au rang $k + 1$. Ce qui termine la preuve.
3. *On décompose f : à toute matrice A on associe l'élément de $\mathbb{R}^{n^2}$: $(a_{11}, \cdots, a_{nn})$ (application continue car linéaire) puis on associe le déterminant de A (fonction continue car polynôme). Donc l'application déterminant est de classe $\mathcal{C}^1$. On pouvait aussi citer le cours qui dit qu'une application n-linéaire est de classe $\mathcal{C}^1$.*
4. *On écrit donc*

$$det(A+H) = det(A_1 + H_1, \cdots, A_n + H_n) = det(A_1, \cdots, A_n) + \sum_{j=1}^{n} det(A_1, \cdots H_j, \cdots, A_n)$$

$$\underbrace{+ \sum_{1 \leq j < k \leq n} det(A_1, \cdots, H_j, \cdots, H_k, \cdots, A_n) + \cdots}_{=o(\|H\|)}$$

   C'est à dire

$$det(A+H) = det(A) + \sum_{j=1}^{n} det(A_1, \cdots H_j, \cdots, A_n) + o(\|H\|)$$

   On développe $det(A_1, \cdots H_j, \cdots, A_n)$ selon la j-ème colonne et cela donne

$$det(A_1, \cdots H_j, \cdots, A_n) = \sum_{i=1}^{n} h_{ij} \widetilde{A}_{i,j}$$

où $\widetilde{A}$ désigne la comatrice de A et celà s'écrit donc, en utilisant le produit scalaire $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}({}^tAB)$,

$$det(A+H) = det(A) + \langle \widetilde{A}, H \rangle + o(\|H\|)$$

Celà prouve que f est différentiable et que sa différentielle en A est

$$df_A : H \mapsto \langle \widetilde{A}, H \rangle = tr({}^t\widetilde{A}H)$$

et que son gradient en A est $\nabla f(A) = \widetilde{A}$. Les points critiques sont les matrices dont la comatrice est nulle ;
Supposons que ${}^t\widetilde{A} = 0$; comme on a ${}^t\widetilde{A} \cdot A = det(A) \cdot I_n$, on peut donc dire que ${}^t\widetilde{A} = 0$ implique que $det(A) = 0$ donc $rg(A) \leq n-1$.
Réciproquement, Si $rg(A) \leq n-2$, il est facile de voir que A est semblable à une matrice ayant 2 colonnes nulles ; chaque mineur étant de taille $n-1$, il rencontrera au moins l'une de ces colonnes et sera nul donc ${}^t\widetilde{A} = 0$.
Si $rg(A) = n-1$ alors A est semblable à une matrice ayant ses $n-1$ premières colonnes libres et une colonne liée. Donc on peut extraire au moins un mineur non nul (sinon $\forall X$, $det(C_1, \cdots, C_{n-1}, X) = 0$) et ce serait contradictoire avec le fait qu'on peut choisir X indépendant des $n-1$ colonnes) et donc $rg({}^t\widetilde{A}) \geq 1$ mais la relation $A \cdot {}^t\widetilde{A} = 0$, liée au théorème du rang prouve que $rg({}^t\widetilde{A}) \leq 1$. Donc $rg({}^t\widetilde{A}) = 1$. En conclusion, l'ensemble des points critiques de det est l'ensemble des matrices de rang $\leq n-2$.

Exercice 8. ** Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$.
On dit alors que f est homogène de degré 1.
On considère la surface S d'équation cartésienne $z = f(x, y)$

1. Que dire de S si f est linéaire ?
2. Donner un exemple d'une fonction homogène sans être linéaire.
3. Montrer que S est une réunion de droites passant par $(0, 0)$. On dit que S est un cône de sommet O.
4. Montrer que f est dérivable suivant tout vecteur h de coordonnées (h_1, h_2) en $(0, 0)$ et que de plus $D_h f(0, 0) = f(h_1, h_2)$.
5. En déduire que si f n'est pas linéaire, f ne peut pas être de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Solution **8.** **.**
1. *Si f est linéaire, alors $z - f(x, y) = 0$ est l'équation d'un plan.*
2. *On peut prendre par exemple* $f(x, y) = \dfrac{x^4 + y^4}{2x^3 + 3x^2y}$.
3. *On vérifie facilement que si $(x, y, z) \in S$, alors $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda(x, y, z) \in S$; ce qui signifie exactement que que pour tout point non nul de S la droite passant par ce point et par 0 est incluse dans S, d'où la conclusion.*
4. *Il suffit d'appliquer la définition de de la dérivée d'un vecteur en remarquant que $f(0, 0) = 0$ (pourquoi) ?*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(th_1, th_2)}{t} = \lim_{t \to 0} t \frac{f(h_1, h_2)}{t} = f(h_1, h_2)$$

ce qui montre que le vecteur dérivée en $(0, 0)$ suivant le vecteur (h_1, h_2) est $f(h_1, h_2)$.
5. *On vient de montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors la différentielle en $(0, 0)$ est $df_0(h) = f(h)$ qui est linéaire, c'est*

$$df_0(h) = (\operatorname{Grad} f(0)|h).$$

Donc f est linéaire !

Exercice 9. ♡**

1. Démontrer que, pour tous (x, y) réels, alors $|xy| \leq x^2 - xy + y^2$.

2. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = (x^p y^q)/(x^2 - xy + y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$, où p et q sont des entiers non nuls. Pour quelles valeurs de p et q cette fonction est-elle continue ?
3. Montrer que si $p + q = 2$, alors f n'est pas différentiable.
4. On suppose que $p + q = 3$, et que f est différentiable en $(0,0)$. Justifier qu'alors il existe deux constantes a et b telles que $f(x,y) = ax + by + o(\|(x,y)\|)$. En étudiant les applications partielles $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$, justifier que $a = b = 0$. Conclure, à l'aide de $x \mapsto f(x,x)$, que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Solution **9.** .

1. *On a $(|x| - |y|)^2 = |x|^2 - 2|xy| + y^2 \geq 0$, ce qui donne l'inégalité demandé !*
2. *Seule la continuité en $(0,0)$ pose problème. On a donc $|f(x,y)| \leq |xy||x^{p-1}y^{q-1}|/(x^2 - xy + y^2) \leq x^{p-1}y^{q-1}$. Cette dernière quantité tend vers 0, sauf si $p-1 = q-1 = 0$, c'est-à-dire sauf si $p+q = 2$. Dans ce cas, on a $f(x,x) = 1$, qui ne tend pas vers 0 si x tend vers 0. f n'est alors pas continue en $(0,0)$.*
3. *Si $p + q = 2$, la fonction n'est pas continue : a fortiori, elle ne peut pas être différentiable.*
4. *Si $p+q = 3$, et que f est différentiable en $(0,0)$, alors $f(x,y) = f(0,0) + df_{(0,0)}(x,y) + o(\|(x,y)\|)$. Mais la différentielle est ici une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On note (ab) sa matrice. On obtient alors le résultat demandé. Ensuite, puisque $f(x,0) = 0 = ax + o(|x|)$, on obtient que $a = 0$. De même en étudiant l'application $y \mapsto f(0,y)$, on trouve $b = 0$. Ainsi, $f(x,x) = o(|x|)$. Mais $f(x,x) = x$ (cf le calcul fait avant), qui n'est pas un $o(|x|)$.*

Exercice 10. *** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On définit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Démontrer que F est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Si f de classe $\mathcal{C}^2$, alors montrer que F est $\mathcal{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.

Solution **10.** .

1. *Si $\in \mathcal{C}^1$, alors on peut écrire pour tous x, $y \in \mathbb{R}$*

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(u)\,du = (y - x)\int_0^1 f'(x + t(y - x))\,dt$$

et pour $x \neq y$, on a

$$F(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \int_0^1 f'(x + t(y - x))\,dt$$

Pour $y = x$, on a aussi $F(x,x) = f'(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(x)\,dt$.

La fonction $(x,y,t) \mapsto f'(x + t(y - x))$ étant continue sur $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ et l'intégration se faisant sur un segment, on en déduit que F est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. *On a montré que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,*

$$F(x,y) = \int_0^1 f'(x + t(y - x))\,dt,$$

et si f est de classe $\mathcal{C}^2$, le théorème de Leibniz nous dit que F admet des dérivées partielles de classe $\mathcal{C}^1$ suivant x et y et donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 (1 - t)f''(x + t(y - x))\,dt, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \int_0^1 tf''(x + t(y - x))\,dt$$

et en particulier

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,a) = \frac{\partial F}{\partial y}(a,a) = \frac{f''(a)}{2}$$

Exercice 11. Soit $f : (x, y) \mapsto x^3 y$. Calculer

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(y,x)); \ \frac{\partial f}{\partial x}(y,x); \ \frac{\partial}{\partial y}(f(y,x)); \ \frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(f(\cos\theta, \sin\theta)); \ \frac{\partial}{\partial x}(f(xy, x+y)); \ \frac{\partial}{\partial y}(f(xy, x+y)).$$

Solution **11.** . *Soit $f : (x, y) \mapsto x^3 y$. Pour calculer les expressions ci-dessous, vous devez bien sûr utiliser la formule de la composée des différentielles (c'est-à-dire le produit des jacobiens et en aucun cas développer $f(\cos\theta, \sin\theta)$.*
$\frac{\partial}{\partial x}(f(y,x)) = y^3$; $\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = 3yl^2x$; $\frac{\partial}{\partial y}(f(y,x)) = 3y^2x$; $\frac{\partial f}{\partial y}(y,x) = 3y^2$ *On utilise la compostion :*

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(f(\cos\theta,\sin\theta)) = (\frac{\partial f}{\partial x}(\cos\theta,\sin\theta), \frac{\partial f}{\partial y}(\cos\theta,\sin\theta)) \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = (3\cos^2\theta\sin\theta, \cos^3\theta) \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

et $\frac{\partial}{\partial \theta}(f(\cos\theta,\sin\theta)) = -3\cos^2\theta\sin^2\theta + \cos^4\theta$.
De même

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(xy,x+y)) = y\frac{\partial f}{\partial x}(xy,x+y) + \frac{\partial f}{\partial y}(xy,x+y) = y \times 3(xy)^2(x+y) + (xy)^3 = 4x^3y^3 + 3x^2y^4$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f(xy,x+y)) = x\frac{\partial f}{\partial x}(xy,x+y) + \frac{\partial f}{\partial y}(xy,x+y) = x \times 3(xy)^2(x+y) + (xy)^3 = 4x^3y^3 + 3x^4y^2$$

3 Gradients, extrema

Exercice 12. (*Le gradient en coordonnées cylindriques*) ♡** La fonction

$$f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \ (r, \varphi, z) \mapsto (x, y, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$

change les coordonnées cylindriques (r, φ, z) en coordonnées cartésiennes (x, y, z).

1. Calculer la matrice jacobienne $Jf_{(r,\varphi,z)}$.
2. Représenter sur un dessin les coordonnées cylindriques (r, φ, z) d'un point M et les trois vecteurs colonnes de la jacobienne.
3. Exprimer le gradient en coordonnées cylindriques.

Solution **12.** . *1. La fonction f est différentiable (car elle est de classe $\mathcal{C}^1$). Soit J la matrice jacobienne $Jf_{(r,\varphi,z)}$:*

$$J = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{\partial \varphi} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} \partial_r x & \partial_\varphi x & \partial_z x \\ \partial_r y & \partial_\varphi y & \partial_z y \\ \partial_r z & \partial_\varphi z & \partial_z z \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_r & re_\varphi & e_z \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & +r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

2. Les trois vecteurs colonnes de la jacobienne sont représents sur la figure 1.

3. Soit une fonction différentiable $g : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}, \ (x,y,z) \mapsto g(x,y,z)$.
La fonction $G = g \circ f$ vérifie $g(x,y,z) = G(r,\varphi,z)$. Elle est différentiable car c'est la composée de deux fonctions différentiables : $dG_{(r,\varphi,z)} = dg_{(x,y,z)} \circ df_{(r,\varphi,z)}$. Matriciellement, $JG_{(r,\varphi,z)} = Jg_{(x,y,z)} \circ Jf_{(r,\varphi,z)}$, autrement dit :

$$\begin{pmatrix} \partial_r G & \partial_\varphi G & \partial_z G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x g & \partial_y g & \partial_z g \end{pmatrix} \cdot J.$$

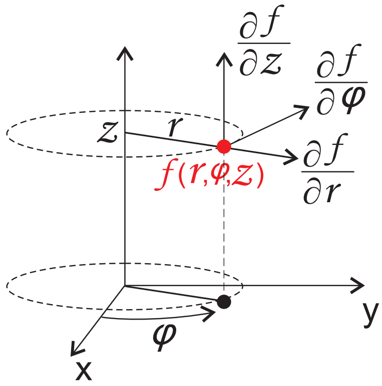


FIGURE 1 – Coordonnées cylindriques

Si $r \neq 0$, alors la matrice J est inversible et

$$J^{-1} = \begin{array}{c} e_r \to \\ \frac{1}{r}e_\varphi \to \\ e_z \to \end{array} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\frac{\sin\varphi}{r} & +\frac{\cos\varphi}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \partial_x g \\ \partial_y g \\ \partial_z g \end{pmatrix} = {}^t(J^{-1}) \cdot \begin{pmatrix} \partial_r G \\ \partial_\varphi G \\ \partial_z G \end{pmatrix} = \partial_r G\, e_r \,+\, \frac{1}{r}\partial_\varphi G\, e_\varphi \,+\, \partial_z G\, e_z.$$

Exercice 13. (***Le gradient en coordonnées sphériques***) ** La fonction

$$f \,:\, \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (r,\varphi,\theta) \mapsto (x,y,z) = (r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta)$$

change les coordonnées sphériques (r,φ,θ) en coordonnées cartésiennes (x,y,z).

1. Calculer la matrice jacobienne $Jf_{(r,\varphi,\theta)}$.
2. Représenter sur un dessin les coordonnées sphériques (r,φ,θ) d'un point M et les trois vecteurs colonnes de la jacobienne.
3. Exprimer le gradient en coordonnées sphériques.

Solution **13.** .

1. *La fonction f est différentiable (car elle est de classe $\mathcal{C}^1$). Soit J la matrice jacobienne $Jf_{(r,\varphi,\theta)}$:*

$$J = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{\partial \varphi} & \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} \partial_r x & \partial_\varphi x & \partial_\theta x \\ \partial_r y & \partial_\varphi y & \partial_\theta y \\ \partial_r z & \partial_\varphi y & \partial_\theta z \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_r & r\cos\theta e_\varphi & re_\theta \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & +r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix} \end{array}.$$

2. *Les trois vecteurs colonnes de la jacobienne sont représents sur la figure 2.*
3. *Soit une fonction différentiable $g \,:\, \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto g(x,y,z)$.*
   La fonction $G = g \circ f$ vérifie $g(x,y,z) = G(r,\varphi,\theta)$. Elle est différentiable car c'est la composée de deux fonctions différentiables : $dG_{(r,\varphi,\theta)} = dg_{(x,y,z)} \circ df_{(r,\varphi,\theta)}$. Matriciellement, $JG_{(r,\varphi,\theta)} = Jg_{(x,y,z)} \circ Jf_{(r,\varphi,\theta)}$, autrement dit :

$$\begin{pmatrix} \partial_r G & \partial_\varphi G & \partial_\theta G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x g & \partial_y g & \partial_z g \end{pmatrix} \cdot J.$$

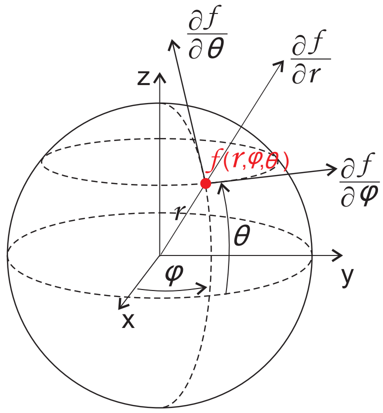


Figure 2 – Coordonnées sphériques

Si $r\cos\theta \neq 0$, alors la matrice J est inversible et

$$J^{-1} = \begin{array}{c} e_r \to \\ \frac{1}{r\cos\theta} e_\varphi \to \\ \frac{1}{r} e_\theta \to \end{array} \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\varphi}{r\cos\theta} & +\frac{\cos\varphi}{r\cos\theta} & 0 \\ -\frac{\cos\varphi\sin\theta}{r} & -\frac{\sin\varphi\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \partial_x g \\ \partial_y g \\ \partial_z g \end{pmatrix} = {}^t(J^{-1}) \cdot \begin{pmatrix} \partial_r G \\ \partial_\varphi G \\ \partial_\theta G \end{pmatrix} = \partial_r G\, e_r + \frac{1}{r\cos\theta}\partial_\varphi G\, e_\varphi + \frac{1}{r}\partial_\theta G\, e_\theta.$$

Exercice 14. ♡* Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes.

1. $g(x,y) = x^2y + \ln(1+y^2)$.
2. $f(x,y) = x^4 + y^3 - 3y - 2$
3. $k(x,y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$.
4. $h(x,y) = \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ sur $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$ (on montera que g se prolonge par continuité en $(0,0)$).

Obtient-on des extrema globaux ?

Solution **14.** .

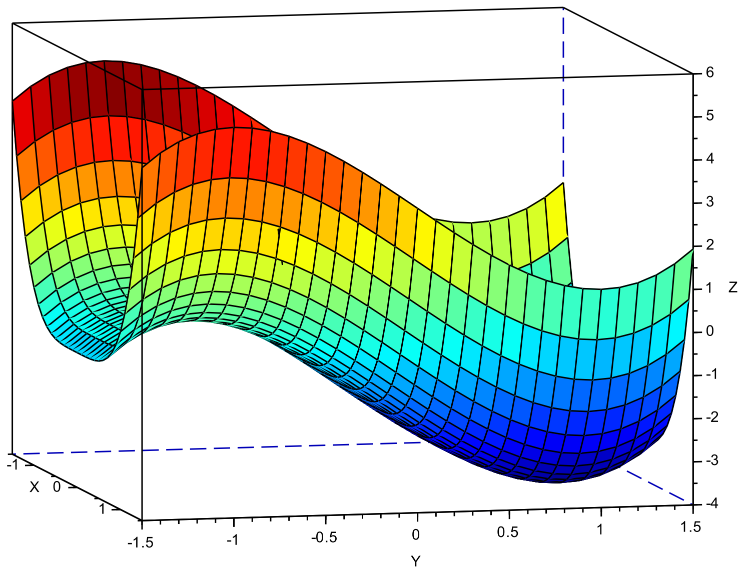
1. *Comme $\partial_1 g(x,y) = 2xy$ et $\partial_2 g(x,y) = x^2 + \dfrac{2y}{1+y^2}$, on en déduit que $(0,0)$ est l'unique point critique.*
   On a pour tout $t > 0$, $g(t,t) = t^3 + \ln(1+t^2) > 0$ et $g(t,-t^4) = -t^6 + \ln(1+t^8) \sim_0 -t^6 < 0$. Donc f n'admet pas d'extremum.
2. *On trouve $A(0,1)$ et $B(0,-1)$ comme point critique.*

   $$f(h, 1+k) = -4 + h^4 + k^3 + 3k^2$$

   qui montre qu'au voisinage de A, $f(h,1+k) \geq -4$.
   On procède de même en B.

   $$f(h,-1+k) = f(0,-1) + h^4 + k^3 - 3k^2$$

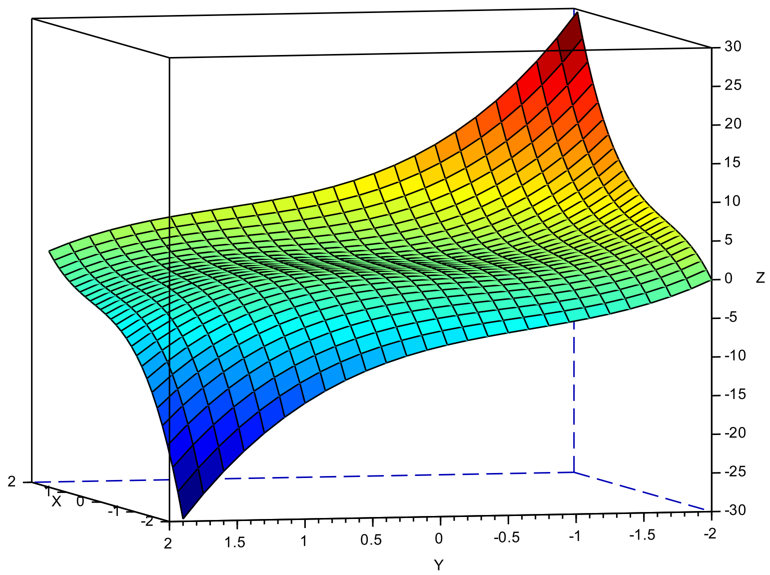
   et $f(0,-1+k) - f(0,-1) = k^3 - 3k^2 < 0$ pour $0 < |k| < 1$, mais $f(h,-1) - f(0,-1) = h^4 > 0$ pour tout $h \neq 0$.



3. $k(x,y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$. *On trouve* $(0,0)$ *comme unique point critique :*

$$\begin{cases} \partial_1 k(x,y) = 0 \\ \partial_2 k(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 + y^2 - 2xy = 0 \\ 2xy - x^2 - 3y^2 = 0 \end{cases} \underset{L_1+L_2}{\iff} \begin{cases} 2x^2 + (x-y)^2 = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \iff x = y = 0.$$

Mais $k(2t,t) = t^3$.

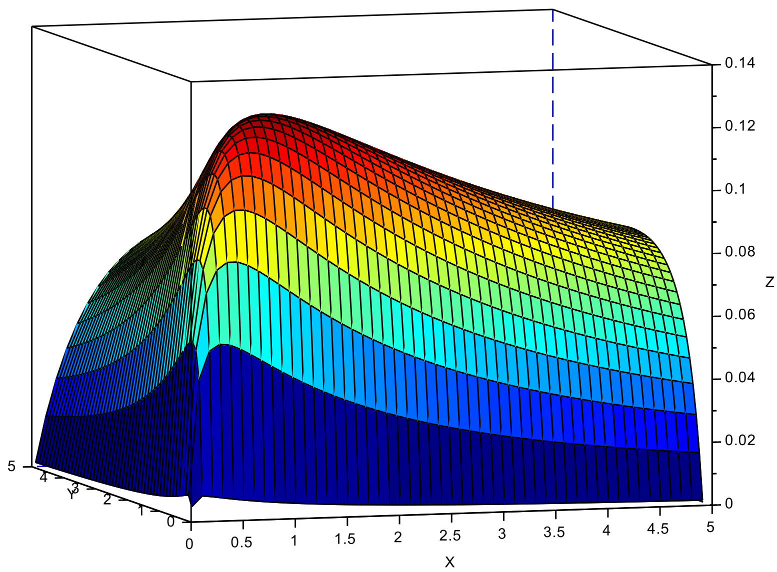


4. *Tout d'abord,* $|h(x,y) \leq \dfrac{|x| \times |y|}{|x| + |y|} \leq \dfrac{1}{2}\max(|x|,|y|)$. *On en déduit que l'on peut prolonger* h *par continuité en* $(0,0)$.

De plus, pour $(x,y)\neq(0,0)$, $|h(x,y)|\leq\dfrac{1}{|x+y|}$, donc h tend vers 0 quand $\|(x,y)\|_\infty$ tend vers $+\infty$. On en déduit que h admet un maximum sur tout compact $\mathbb{R}_+^2\cap\mathcal{B}_f(O,r)$ puisque l'on a pu prolonger f par continuité. Enfin, le max n'est pas atteint en $(0,y)$ ou $(x,0)$. Donc f admet au moins un point critique sur par exemple la boule de centre 0 et de rayon 10 : en effet si $\|(x,y)\|_1\geq 10$, alors $|h(x,y)|\leq\dfrac{1}{10}$ et $f(1,1)=\dfrac{1}{8}$. Donc le maximum est atteint à l'intérieur la boule de centre 0 et de rayon 10 (pour la norme 1).
Or

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{y(1+x)(x+y)-xy(1+2x+y)}{(1+x)^2(1+y)(x+y)^2}=\frac{y(y-x^2)}{(1+x)^2(1+y)(x+y)^2}$$

et $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial h}{\partial x}(y,x)$.
On obtient soit $x=y=0$, soit $y=x^2$ et $x=y^2$ mais alors $y=y^4$. Si $y\neq0$, $y^3=1$ et $y=1$, d'où $x=1$. Il n'y a que deux points critiques, $(0,0)$ qui n'est pas un maximum,ou $(1,1)$ qui est donc nécessairement le maximum.



Exercice 15. ** Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$.

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. La fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$?
3. Étudier les extrema locaux de f.

Solution **15.** . *1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ comme composée et quotient de fonction $\mathcal{C}^\infty$.*
En $(0,0)$: on pose $(x,y)=(0,0)$ et $f(x,y)=2\rho^2\cos\theta\sin\theta\ln\rho=o((x,y))$, donc f est continue et différentiable en $(0,0)$ et sa différentielle est l'application nulle.
De plus, pour $(x,y)\neq(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}$. On montre comme précédemment que

$$\lim_{(x,y)\to0}y\ln(x^2+y^2)+\frac{2x^2y}{x^2+y^2}=0,$$

donc les dérivées partielles sont continues (le rôle de x et de y sont identiques.
On calcule pour $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{2x^2(x^2+y^2) - 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

et le premier terme de la somme tend vers $-\infty$ quand ρ tend vers 0 tandis que les autres termes sont bornés. On en déduit que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$.

2. *On doit calculer les points critiques*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\ln(x^2+y^2) + \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

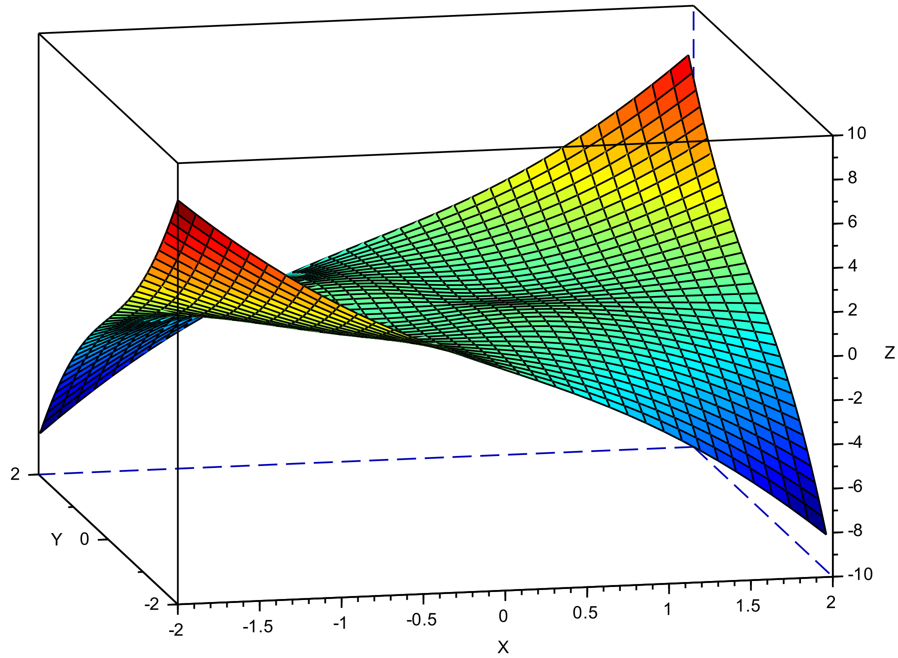
Si $y = 0$, on obtient $x\ln x^2 = 0$ d'où $x = \pm 1, 0$ soit 3 points critiques $(0,0)$, $(1,0)$ et $(-1,0)$ et par symétrie $(0,1)$ et $(0,-1)$. Ce ne sont pas des extrema car f s'annule et change de signe en chacun de ces points : $f(x,y) = -f(-x,y) = -f(x,-y) = f(-x,-y)$.
Si $xy \neq 0$, le système devient

$$\begin{cases} \ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2}{x^2+y^2} = 0 \\ \\ \ln(x^2+y^2) + \dfrac{2y^2}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

En posant $(x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, on obtient en sommant les lignes $4\ln(\rho) = -2$, donc $\rho = e^{-1/2}$ et $|\cos\theta| = |\sin\theta| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc 4 points critiques $\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}e^{-1/2}}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{2}e^{-1/2}}{2}\right)$.
Nous allons montrer que ces points sont des extrema : supposons $R > 0$ fixé et étudions

$$g(\theta) = f(R\cos\theta, R\sin\theta) = R^2\sin 2\theta \ln R$$

Les extrema (maximum et minimum) de g sont atteints pour $sin2\theta = \pm 1$ et valent $R^2|\ln R|$ et $-R^2\ln|R|$. Mais $h(R) = R^2\ln R$ admet pour dérivée $h'(R) = (2\ln R + 1)$ atteint son maximum en $R = e^{-1/2}$. On en déduit que les 4 points sont bien des extrema.
En fait, le changement de variables en polaires nous donne les extrema sans avoir à passer par les dérivées partielles.



Exercice 16. ** Soit f une fonction convexe différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que tout point critique de f est un minimum global.

Solution **16.** . *On va procéder par contraposée, ie on va prendre un point x de $\mathbb{R}^n$ qui n'est pas un minimum global, et on va prouver que $df_x \neq 0$. Soit $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(y) < f(x)$. Alors, pour $t \in]0,1[$,*

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \Rightarrow \frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t} \leq f(y) - f(x) < 0.$$

La limite quand t tend vers 0 du terme de droite est par définition la dérivée en x suivant le vecteur $y-x$, donc

$$df_x(y-x) \leq f(y) - f(x) < 0.$$

La différentielle de f en x ne peut donc pas être nulle.

Exercice 17. ** Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on note $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}$ le vecteur nul de E.
Dans cet exercice, on considère une matrice symétrique A définie positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in E$.
On définit une application f de E vers $\mathbb{R}$ par :

$$\forall X \in E,\ f(X) = {}^tXAX - {}^tBX$$

1. Démontrer que $\left\{ \dfrac{{}^tXAX}{\|X\|^2} ; X \in E \setminus \{\mathcal{O}\} \right\}$ admet un minimum que l'on exprimera en fonction des valeurs propres de A. f a-t-elle un maximum absolu sur E ?
2. Démontrer que f admet un minimum absolu sur E.
3. Démontrer que f est différentiable sur E et déterminer sa différentielle. En déduire que le minimum absolu de f sur E est atteint en un unique vecteur de E que l'on exprimera en fonction de A et B.

Solution **17.** .

1. *Il existe une base orthonromée $(E_1, \cdots, E_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}$ composée de vecteurs propres de A et valeurs propres associés $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Comme A est définie positive, $\lambda_1 > 0$.*
   Pour tout $X = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i \in E$, ${}^tXAX = \sum_i \lambda_i x_i^2 \geq \lambda_1 \|X\|^2$.
   Ceci montre que $\left\{ \frac{{}^tXAX}{\|X\|^2};\, X \in E \setminus \{\mathcal{O}\} \right\}$ admet pour minimum $\lambda_1 > 0$, la plus petite valeur propre de A. De plus, en appliquant l'inégalité de cauchy-Schwarz à $(B|X)$, on obtient
   $$X \in E,\, f(X) \geq \lambda_1 \|X\|^2 - \|B\|\|X\| \Rightarrow \lim_{\|X\| \to +\infty} f(X) = +\infty.$$
   En particulier, f n'admet pas de maximum absolu sur E.
2. *Par définition de la limite, il existe M tel que $\|X\| > M$ implique $f(X) > 1$. Comme la fonction f est continue (polynôme) sur la boule fermée $\mathcal{B}_F(0, M)$ (compacte), elle admet un minimum sur $\mathcal{B}_F(0, M)$. Ce minimum est nécessairement un nimum absolu, car par exemple $f(0) = 0$ et donc le minimum est strictement inférieur à 1.*
3. *On sait (ou on redémontre) que $X \mapsto {}^tXAX$ est différentiable et que sa différentielle en X est $H \mapsto 2\,{}^tXAH$ et la fonction $X \mapsto {}^tBX$ est différentiable car linéaire. Ainsi f est différentiable et sa différentielle en X est $df_X : H \mapsto \varphi(2X, H) - {}^tBH = {}^tXAH - {}^tBH = \langle 2AX - B, H\rangle$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur E ; Le gradient de f en X est donc $\nabla f(X) = 2AX - B$.*
   Comme A est inversible, f n'a qu'un point critique $X_0 = \dfrac{1}{2}A^{-1}B$.
   Ainsi f étant C^1 sur E, atteint forcément son minimum absolu en son unique point critique $\dfrac{1}{2}A^{-1}B$. (minimum qui vaut donc $-\frac{1}{2}\ {}^tBA^{-1}B$).

4 Connexité par arcs

<u>Exercice 18.</u> ♡* Montrer qu'un plan privé d'un nombre fini de points est connexe par arcs.

<u>Solution **18.**</u> **.** *Soit $\mathcal{A} = \{A_1, \cdots, A_m\}$ une partie du plan constituée d'un nombre fini de points. Soit B et C deux points du plan privé de $\mathcal{A}$.*
Les droites passant par B et rencontrant $\mathcal{A}$ sont en nombre fini : il y en a au plus m. On peut donc choisir une droite D_B passant par B (il y en a une infinité) et qui ne rencontre pas $\mathcal{A}$. De même, on choisit une droite D_C passant par C qui ne rencontre pas $\mathcal{A}$ et qui n'est pas l'unique droite passant par C et parallèle à D_B.
Par hypothèse, les droites D_B et D_C s'intersecte en un point M et apr hypothèse $([BM] \cup [M, C]) \cap \mathcal{A} = \emptyset$. On en déduit que $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}$ est connexe par arcs.

<u>Exercice 19.</u> Montrer que l'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

<u>Solution **19.**</u> **.** *Cours !*

<u>Exercice 20.</u> * Soient A et B deux parties fermées non vides d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. On suppose $A \cup B$ et $A \cap B$ connexes par arcs, montrer que A et B sont connexes par arcs.

<u>Solution **20.**</u> **.** *On commence par montrer que $A \cap B \neq \emptyset$: il existe $a \in A$ et $b \in B$ car A et B non vides. Il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \to A \cup B$ continue tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. On construit par récurrence des suite (u_n) croissante, (v_n) décroissante à valeurs dans $[0, 1]$, telles que $u_0 = 1$, $b_0 = 1$ et on suppose u_n et v_n, $\gamma(u_n) \in A$, $\gamma(v_n) \in B$.*
Si $\gamma(\dfrac{u_n + v_n}{2}) \in A$, alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = v_n$. Sinon, $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$, $u_{n+1} = u_n$.
Dans les deux cas, $\gamma(v_{n+1}) \in B$ et $\gamma(u_{n+1}) \in A$.
Les suites (u_n) et v_n sont adjacentes, donc conergentes vers l. Par continuité de γ, $\gamma(u_n)$ et $\gamma(v_n)$ converge vers $\gamma(l)$. Comme A et B sont des fermés, $\gamma(l) \in A \cap B$. Donc $A \cap B \neq \emptyset$.
Montrons que A est connexe par arcs : soit $c \in A \cap B$ fixé, on montre que pour tout $x \in A$ il existe un chemin de x à c :

1. *si $x \in A \cap B$, alors il existe un chemin dans $A \cap B$ et donc dans A qui relie x à c*
2. *sinon, il existe $\gamma : [0,1] \to A \cup B$, tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = c$.*
   (a) *Si $\gamma([0,1]) \subset A$, on a bien un chemin dans A qui relie x et c.*
   (b) *Sinon, on peut supposer $x \notin B$ et on pose $\delta = \inf\{t \in [0,1], \gamma(t) \in B\}$: par hypothèse l'ensemble considéré est non vide et minoré.*
   De plus, $\delta > 0$: en effet, s'il exsite une suite (δ_n), $\delta_n > 0$, $\gamma(\delta_n) \in B^{\mathbb{N}}$ tend vers x, alors $x \in B$, car B est fermé, ce qui contredit $x \notin B$.
   Montrons que $\gamma(\delta) \in A \cap B$:
      i. *$\gamma(\delta) \in A$: par définition de δ, $\forall n >> 0$, $\gamma(\delta - \frac{1}{n}) \in A$ et comme A est fermé, on en déduit le résultat.*
      ii. *$\gamma(\delta) \in B$: pour tout $n > 0$, il existe $\delta \leq \delta_n < \delta + \frac{1}{n}$ tel que $\gamma(\delta_n) \in B$ et on conclut par passage à la limite, B étant fermé.*

   Il existe donc un chemin dans A qui relie x à $\gamma(\delta)$. Mais $\gamma(\delta) \in A \cap B$ et $A \cap B$ connexe par arcs, il existe un chemin dans $A \cap B$ qui relie $\gamma(\delta)$ à c et on a fini.

On en déduit que pour tout x et $y \in A$, il existe un chemin qui relie x et y en passant par c.
Une autre rédaction : *Si $B \subset A$, alors $A \cup B = A$ est connexe par arcs. Sinon, il existe $b \in B \setminus A$. Pour tout $a \in A$, il existe un chemin continu $\gamma : [0,1] \to A \cup B$ tel que $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$. On construit par récurrence des suite (u_n) croissante, (v_n) décroissante à valeurs dans $[0,1]$, telles que $u_0 = 1$, $b_0 = 1$ et on suppose u_n et v_n, $\gamma([0, u_n] \subset A$, $\gamma(v_n) \in B \setminus A$.*
Si $\gamma([0, \frac{u_n + v_n}{2}] \subset A$, alors $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = v_n$. Sinon, il existe $v_{n+1} \leq \frac{u_n + v_n}{2}$, tel que $\gamma(v_{n+1}) \in B \setminus A$ et on pose $u_{n+1} = u_n$.
Dans les deux cas, $\gamma(b_{n+1}) \in B$ et $\gamma([0, u_{n+1}]) \subset A$.
Les suites (u_n) et v_n sont adjacentes, donc conergentes vers l. Par continuité de γ, $\gamma(u_n)$ et $\gamma(v_n)$ converge vers $\gamma(l)$. Comme A et B sont des fermés, $\gamma(l) \in A \cap B$. On en déduit que $\gamma([0,l]) \subset A$. Il existe donc un chemin dans de A à un point de $A \cap B$. Donc tout point de a est dans la même composante connexe qu'un point de $A \cap B$. Par connexité de $A \cap B$, tous les points de A sont dans la même composante connexe, A est connexe arcs.

Exercice 21. ♡ ** Montrer que

1. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs
2. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.
3. $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est une partie connexe par arcs.
4. $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotentes. Montrer que $\mathcal{N}$ est une partie étoilée.

Solution **21. .**

1. *Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice triangulaire inversible, alors*
   $\gamma : [0,1] \to \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$, $t \mapsto \Big((1 - \delta_{i,j})(1-t)a_{i,j} + \delta_{i,j} a_{i,j} \Big)$
   relie A à la matrice diagonale $Diag(a_{1,1}, \cdots, a_{n,n})$ dans $\mathcal{T}_n(\mathbb{C}) \cap GL_n(\mathbb{C})$, les matrcies triangulaires supérieures inversibles.
   Posons $a_{i,i} = \rho_i \exp \theta_i$ avec $\rho_i > 0$.
   Le chemin $\widetilde{\gamma} : t \mapsto \mathrm{Diag}\left([(1-t)\rho_1 + t]\exp\big((1-t)\theta_1\big), \cdots, [(1-t)\rho_n + t]\exp\big((1-t)\theta_n\big)\right)$ la relie à la matrice identité.
   Comme toute matrice de $GL_n(\mathbb{C})$ s'écrit $A = P^{-1}TP$ avec T triangulaire supérieure, alors $P^{-1}\gamma P$ relie A à la matrice identité dans $GL_n(\mathbb{C})$ où γ est un chemin qui relie T à la matrice identité dans $GL_n(\mathbb{C}) \cap \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$.
   Une autre méthode plus efficace : *On considère $P(t) = \det((1-t)A + tB)$. Comme $P(0) \neq 0$, P n'est pas le polynôme nul. Donc P a un nombre fini de racines A dans $\mathbb{C}$. On sait $\mathbb{C} \setminus A$ est connexe par arcs. Donc l'image de $\mathbb{C} \setminus A$ par l'application continue $t \mapsto (1-t)A + tB$ est connexe par arcs. Comme A et B appartiennent à cette image, il existe un chemin continu de A à B. On a montré que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.*

2. *L'application* $\det GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *est continue et son image est* $\mathbb{R}^*$. *Si* $GL_n(\mathbb{R})$ *est connexe par par arcs, alors* $\mathbb{R}^*$ *est connexe par arcs. C'est absurde.*
3. $t \mapsto S((1-t)\theta_1 + \theta_2)$ *relie* $S(\theta_1)$ *à* $S(\theta_2)$.
4. *Il faut comprendre ètoilée par rapport à 0 ! et c'est trivial* $t \mapsto (1-t)N$ *est bien inclus dans l'ensemble des matrices nilpotentes.*

Exercice 22. ** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ |f(x) - f(y)| \leq \|x-y\|^2$. Montrer que f est constante.

Solution **22.** . *La condition montre que* $|f(a+h) - f(a)| \leq \|h\|^2$ *et donc la différentielle de* f *en tout point est nulle.*

Exercice 23. ** Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 2$.

1. Soit H un hyperplan de E. L'ensemble $E \setminus H$ est-il connexe par arcs ?
2. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension $p \leq n-2$. L'ensemble $E \setminus F$ est-il connexe par arcs ?

Solution **23.** .

1. *Soit* $(e_1, \cdots, e_n)$ *une base orthonormée de* E *(on choisit une structure euclidienne). Soit* H *un hyperplan d'équation* $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$. *Alors* $E \to \mathbb{R}$, $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ *est continue et l'image de* $E \setminus H \to \mathbb{R}^*$ *est* $\mathbb{R}^*$ *partie non connexe par arcs, donc* $E \setminus H$ *ne l'est pas.*
2. $\forall x = x_F + X_{F^\perp} \in E \setminus F$, $t \mapsto (1-t)x_F + x_{F^\perp}$ *est un chemin qui relie* x *à* $x_{F^\perp}$ *dans* $E \setminus F$. *Comme* $\dim F^\perp \geq 2$, $F^\perp \setminus \{0\}$ *est connexe par arcs : soit la droite* $[x,y]$ *convient (*x *et* y *non colinéaires), sinon, prendre* $z \notin \mathbb{R}x$ *et* $[x,z] \cup [z,y]$ *convient.*

5 Équations aux dérivées partielles

Exercice 24. ♡** Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 1$ en posant $u = x - y$ et $v = x + y$.
2. $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$ en utilisant les coordonnées polaires ;
3. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ en posant $u = x + y$ et $v = 2x + y$.

Solution **24.** .

Exercice 25. ** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, telle que pour tout $M \in \mathbb{R}^2$, df_M soit une similitude directe. Montrer que $\Delta f = 0$.
On rappelle que $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Solution **25.** . *On écrit que la matrice jacobienne de* f *en* M *est une similitude directe :*

$$Jacf(f)(M) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \lambda(M) \begin{pmatrix} \cos\theta(M) & -\sin\theta(M) \\ \sin\theta(M) & \cos\theta(M) \end{pmatrix}$$

dont on déduit que

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

et

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

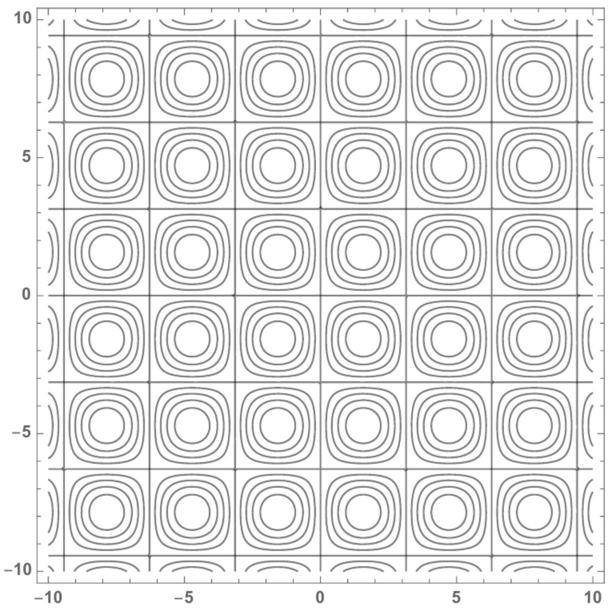
dont on déduit que avec le théorème de Scwharz

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}.$$

De même avec f_2, d'où le résultat !

<u>**Exercice 26.**</u> ** Soit la fonction $f(x, y) = \sin x \sin y$. Faire un dessin représentant toutes les courbes de niveaux de f, c'est-à-dire les courbes d'équation $f(x, y) = k$, $k \in \mathbb{R}$.

<u>*Solution* **26.**</u> **.** *Les courbes de niveaux sont :*



<u>**Exercice 27.**</u> *** On identifie $\mathbb{R}^2$ avec le plan affine euclidien $\mathcal{P}$

1. Soit P_1, ...,$P_n \in \mathcal{P}$ des points deux à deux distincts non alignés, α_1, ..., $\alpha_n \in \mathbb{R}$ et $\varphi : M \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i M^2$.
   (a) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer son gradient.
   (b) Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, vérifier que c'est le gradient d'une fonction plus simple et en déduire que φ admet un extremum global en unique point que l'on caractérisera géométriquement.
   (c) Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, quelles sont les lignes de niveaux de φ ?
   (d) Que se passe-t-il si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$?
2. Soit $\psi : M \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|\overrightarrow{P_i M}\|$.
   (a) Montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{P} \setminus \{P_1, \cdots, P_n\}$ et calculer son gradient.
   (b) Montrer que ψ admet un minimum global.
   (c) Montrer que ψ admet au plus un point critique G et que si ψ admet un point critique, il est unique et ψ admet alors un minimum en ce point. On pourra montrer quelle $\|\overrightarrow{P_i G}\|^2 \leq \|\overrightarrow{P_i G}\| \, \|\overrightarrow{P_i M}\| + \overrightarrow{P_i G}.\overrightarrow{MG}$

(d) Soit $D \in \mathcal{P}$ et $t \mapsto t\overrightarrow{U} + D = M(t)$ le paramétrage d'une droite et $h(t) = \psi(M(t))$ la restriction de ψ à la droite. Calculer $h'(t)$ et $h''(t)$. Vérifier que h admet un minimum atteint en un unique point.

(e) En déduire que si ψ n'admet pas de point critique, alors le minimum est atteint en un seul des points P_i.

3. On suppose ici $n = 3$ et on pose $\overrightarrow{U_i} = \dfrac{\overrightarrow{P_iG}}{\|\overrightarrow{P_iG}\|}$.

(a) Montrer que si ψ admet un point critique G, alors $\overrightarrow{U_1}$, $\overrightarrow{U_2}$ et $-\overrightarrow{U_3}$ définit un triangle équilatéral. En déduire alors que dans le triangle $P_1P_2P_3$ tous les angles sont inférieurs à $2\pi/3$.

(b) Réciproquement, si dans le triangle $P_1P_2P_3$ tous les angles sont inférieurs à $2\pi/3$, montrer que G existe (on pourra étudier l'intersection des cercles circonscrits aux triangles équilatéraux construits sur chacun des côtés du triangle).

(c) Que se passe-t-il si dans le triangle $P_1P_2P_3$ l'un des angles est supérieur à $2\pi/3$?

Solution **27.** .

1. (a) *φ est de calsse $\mathcal{C}^1$ et* $\mathrm{Grad}\,\varphi(M) = 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{P_iM}$ *car*

$$\varphi(M + \overrightarrow{h}) = \sum_i \alpha_i(\overrightarrow{P_iM} + \overrightarrow{h}|\overrightarrow{P_iM} + \overrightarrow{h}) = \varphi(M) + 2(\sum_i \alpha_i \overrightarrow{P_iM}|\overrightarrow{h}) + \left(\sum_i \alpha_i\right) \|\overrightarrow{h}\|^2$$

(b) *On reconnaît le gradient de $M \mapsto \left(\sum \alpha_i\right) GM^2$, avec G barycentre de (P_i, α_i) car $\sum_{i=1} \alpha_i \neq 0$. On en déduit que ces deux fonctions sont égales à une constante et donc suivant le signe de $\sum_i \alpha_i$, φ admet un minimum ou un maximum atteint en G.*

(c) *Les lignes de niveaux sont des cercles de centre G, ou le vide.*

(d) *Si $\sum \alpha_i = 0$, alors* $\mathrm{Grad}\,\varphi(M)$ *ne dépend pas de M et donc est constant. On le note $\overrightarrow{U}$. Si ce vecteur est non nul, alors $\varphi(M + h) = \varphi(M) + (\overrightarrow{U}|h)$ n'admet pas extremum et si ce vecteur est nul, alors ψ est constante. Dans le premier cas, les lignes de niveau sont alors des droites orthogonales au gradient.*

2. (a) *On trouve $Grad(\psi)(M) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\overrightarrow{P_iM}}{\|P_iM\|}$ et ψ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{P} \setminus \{P_1, \cdots, P_n\}$.*

(b) *Quand $\|M\| \to +\infty$, $\psi \to +\infty$, donc admet un minimum par compacité.*

(c) *Si G est ce point critique, l'inégalité se montre pour G qcq avec Chasles et Cauchy-Schwarz. En sommant, on en déduit*

$$\psi(G) \leq \sum_i \|\overrightarrow{P_iM}\| + \left(\sum_i \frac{\overrightarrow{P_iG}}{\|P_iG\|}\right) = \sum_i \|\overrightarrow{P_iM}\| = \psi(M).$$

Le cas d'égalité dans l'inégalité de Schwarz suppose que les $\overrightarrow{P_iG}$ sont tous colinéaires à $\overrightarrow{MG}$, mais les P_i sont supposés non alignés, donc c'est impossible, d'où l'unicité du point fixe qui donne bien le minimum.

(d) *On calcule* $h'(t) = \mathrm{Grad}\,\psi(M(t)).\overrightarrow{U} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\overrightarrow{U}.\overrightarrow{P_iM(t)}}{\|\overrightarrow{P_iM(t)}\|}$ *et*

$$h''(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\|\overrightarrow{P_iM(t)}\|^2\|\overrightarrow{U}\|^2 - (\overrightarrow{U}.\overrightarrow{P_iM(t)})^2}{\|\overrightarrow{P_iM(t)}\|^3}$$

qui montre que h'' est strictement positive et comme $h(t)$ tend vers $+\infty$ si $|t|$ tend vers $+\infty$, on en déduit que h' s''annule une unique fois en passant de négative à positive.

(e) *On applique la question précédente à la droite (P_iP_j).*

3. (a) *On a $\overrightarrow{U_1}+\overrightarrow{U_2}=-\overrightarrow{U_3}$ et les trois evcteurs sont unitaires, d'où le résultat. Les trois angles valent $2\pi/3$, le point G est intérieur au triangle et on conclut avec un dessin.*

   (b) *Deux cerles s'intersectent en un point G intérieur au triangle (car l'angle est inférieur à $2\pi/3$) et n vérifie facilement que G convient.*

   (c) *Un des angles est supérieurs à $2\pi/3$, le minimum est le sommet sommet (avec la relation $\dfrac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\sin\widehat{C}}=\dfrac{\|\overrightarrow{BC}\|}{\sin\widehat{A}}=\dfrac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\sin\widehat{B}}$.*

6 Géométrie

Exercice 28. ♡

1. Trouver les extréma de la fonction $f(x,y)=x^2+y^2$ sous la contrainte $3x^2+2xy+5y^2=72$.
2. Même question avec la fonction $f(x,y)=x^2+y^2+z^2$ sous la contrainte $5x^2+9y^2+6z^2+4yz=1$
3. Même question avec la fonction $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ et les deux contraintes $x+y+z=1$ et $xy=1$.

Solution **28.** .

1. *Soit $g(x,y)=3x^2+2xy+5y^2=3(x+\frac{y}{3})^2+(5-\frac{1}{3})y^2=3(x+\frac{y}{3})^2+\frac{14}{3}y^2$. On en déduit que la courbe $S=g^{-1}(72)$ est compacte comme image directe par l'automorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par*

$$\varphi:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}y\\ \sqrt{\frac{14}{3}}y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{72}=6\sqrt{2}$.
Comme f est continue sur $\mathbb{R}^2$, on en déduit que f admet un maximum et un minimum sur S.
La méthode des multiplcateurs de Lagrange nous dit que ces extrema ont lieu en des points (x,y) tels que $\nabla f(x,y)$ et $\nabla g(x,y)$ sont colinéaires. On doit donc résoudre

$$\det(\nabla f(x,y),\nabla g(x,y))=\begin{vmatrix}2x & 6x+2y\\ 2y & 10y+2x\end{vmatrix}=0\iff 4(x^2-y^2+2xy)=0\iff (x+y)^2-2y^2=0$$

Ou encore, c'est équivalent à $(x+(1-\sqrt{2})y)(x+(1+\sqrt{2})y)=0$. De plus, in on injecte l'équation $x^2-y^2+2xy=0$ dans $g(x,y)=72$, on obtient $2x^2+6y^2=72$ soit $x^2+3y^2=36$. On en déduit

$$\begin{cases}\det(\nabla f(x,y),\nabla g(x,y))=0\\ g(x,y)=72\end{cases}\iff\begin{cases}x=(\sqrt{2}-1)y \text{ ou } x=-(\sqrt{2}+1)y\\ x^2+3y^2=36\end{cases}\iff\begin{cases}x=(\sqrt{2}-1)y \text{ et } y^2=\dfrac{36}{6-2\sqrt{2}}\\ \text{ou}\\ x=-(\sqrt{2}+1)y \text{ et } y^2=\dfrac{36}{6+2\sqrt{2}}\end{cases}$$

On trouve 4 points potentiels. La première ligne donne $f(x,y)=x^2+y^2=x^2+3y^2-2y^2=36-2\dfrac{36}{6-2\sqrt{2}}$ qui correspond au minimum de f atteint en 2 points.
La seconde ligne donne $f(x,y)=36-2\dfrac{36}{6+2\sqrt{2}}$ qui correspond au maximum.

2. *Comme dans l'exemple précédent, on pose*

$$g(x,y,z)=5x^2+9y^2+6z^2+4yz=5x^2+6(z+\frac{y}{3})^2+(9-\frac{2}{3})y^2=5x^2+6(z+\frac{y}{3})^2+\frac{25}{3}y^2$$

On en déduit que la courbe $S = g^{-1}(72)$ est compacte comme image directe par l'automorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{5}x \\ \frac{5}{\sqrt{3}}y \\ \sqrt{6}z + \frac{\sqrt{6}}{3}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

spère de centre O et de rayon 1.
Comme f est continue sur $\mathbb{R}^3$, on en déduit que f admet un maximum et un minimum sur S.
La méthode des multiplicateurs de Lagrange nous dit que ces extrema ont lieu en des points (x, y, z) tels que $\nabla f(x, y, z)$ et $\nabla g(x, y, z)$ sont colinéaires. On doit donc résoudre trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 5x \\ 9y + 2z \\ 6z + 2y \end{pmatrix} \iff \left[x = 5\lambda x \text{ et } \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right]$$

Le spectre la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ sont les racines du polynôme $\chi_A = X^2 - 15X + 50 = 0$, $Spec(A) = \{5, 10\}$. Si $x \neq 0$, alors $\lambda = \dfrac{1}{5}$, $(y\ z)^T \in E_5(A)$. On en déduit $(y\ z) = \alpha(1\ -2)$.
De plus, $g(x, y, z) = 5(x^2 + 5\alpha^2 = 1$ et $f(x, y, z) = x^2 + \alpha^2 = 1/5$.
Si $x = 0$. On exclut $x = y = z = 0$ car il n'appartient pas à la surface $g(x, y, z) = 1$. Donc λ est valeur propre de A.
Si $\lambda = 5$, on trouve encore $(f(x, y, z) = 1/5$.
Si $\lambda = 10$, alors $(y\ z) = \alpha(2\ 1)$. Alors $g(x, y, z) = 50\alpha^2 = 1$ et $f(x, y, z) = 5\alpha^2 = 1/10$.
On en déduit que f admet un minimum qui vaut $1/10$ et un maximum qui vaut $1/5$.

3. *Ici on pose $g(x, y, z) = x + y + z$ et $h(x, y, z) = xy$. Si f admet un extrema sous les contraintes $g(x, y, z) = 1$ et $xy = 1$, alors ∇f est orthogonal à tout vecteur tangent à la courbe C définie par $g(x, y, z = 1$ et $h(x, y, z) = 1$. On a $\nabla g(x, y, z) = 1$ et donc tout vecteur tangent au plan P défini par $g(x, y, z) = 1$ est orthogonal au vecteur $\nabla g = (1\ 1\ 1)^T$. De même tout vecteur tangent en (x, y, z) à la surface S définie par $h(x, y, z) = 1$ est orthogonal à $\nabla h(x, y, z) = (y\ x\ 0)^T$. On en déduit que $\nabla g \wedge \nabla h$ est un vecteur tangent à la courbe C.*
Donc, si f admet un extremum sur $P \cap S$, alors

$$0 =< \nabla f | \nabla g \wedge \nabla h >=< 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} >=< 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} -x \\ y \\ x - y \end{pmatrix} >= 2(x - y)(z - y - x).$$

Si $y = x$, alors $xy = 1$ implique $(x, y, z) = (1, 1, -1)$ ou $(x, y, z) = (-1, -1, 3)$.
Si $x \neq y$, alors $z - y - x = 0$ et $x + y + z = 1$ impliquent $2z = 1$ et $x + \frac{1}{x} = 1/2$ qui n'a pas de solution.
On a $f(1, 1, -1) = 3$, $f(-1, -1, 3) = 11$.
Notons que pour tout $x \neq 0$, $(x, 1/x, 1 - (x + 1/x)) \in P \cap S$ donc f n'est pas majorée.
Comme la fonction f est minorée (par 0) et que $S \cap P$ est un fermé, on en déduit que la borne inférieure est atteinte. D'après l'étude ci-dessus c'est $f(1, 1, -1) = 3$.

Exercice 29. La température sur la sphère $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ est décrite par la fonction $f(x, y, z) = 2 + xz + y^2$. Déterminer les points les plus chauds et les plus froids.

Solution **29.** . *Comme dans l'exercice précédent, f est continue sur le compact S sphère de rayon 2 et de centre O. Donc admet un minimum et un maximum.*
On applique la méthode des multiplicateurs de Lagrange : le produit vectirels des deux gradients doit être nulle :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} z \\ 2y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x - 2z) \\ z^2 - x^2 \\ y(2x - z) \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}$$

Si $y = 0$, alors $(x, y, z) = (\pm\sqrt{2}, 0, \pm\sqrt{2})$ et $f(x, y, z) = 2 \pm 2$.
Si $y \neq 0$, alors $(x, y, z) = (0, 0, \pm 2)$ et $f(x, y, z) = 4$.
On en déduit que le maximum est 4 et le minimum 0.

Exercice 30. Quelle est la distance de l'origine à l'hyperbole $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$?

Solution **30.** . *C'est bien un problème d'extrema liés : il s'agit de rechercher le minimum de $f(x,y) = x^2 + y^2$ (c'est le carré de la distance entre l'origine et $(x,y)\dots$) sur*

$$\Sigma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad g(x,y) := x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0\}.$$

Comme $\nabla g(x,y) = (2x + 8y, 14y + 8x) = (0,0)$ ssi $(x,y) = (0,0) \notin \Sigma$ on peut appliquer la méthode de Lagrange :

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda(2x + 8y) \\ 2y = \lambda(14y + 8x) \end{cases}$$

soit $(1 - \lambda)x + 4y = 0$ et $4x + (7 - \lambda)y = 0$. Comme $(x,y) \neq (0,0)$ on doit avoir

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^\star : \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda - 9 = (\lambda + 1)(\lambda - 9) = 0$$

donc $\lambda = -1$ ou $\lambda = 9$.$\lambda = 1$ implique $y = 0$ puis $x = 0$ ce qui est exclut. $\lambda = 9$ implique $y = 2x$ puis par substitution dans $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$: $45x^2 = 225$ soit $x^2 = 5$ puis $y^2 = 20$ i.e. $x^2 + y^2 = 25$: la distance de l'origine à Σ est donc égale à 5 . Elle est atteinte en les points $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ et $(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$. On pouvait aussi rechercher les points qui annulent le déterminant de la matrice 2×2 : $\begin{pmatrix} \nabla f(x,y) \\ \nabla g(x,y) \end{pmatrix}$. On trouve $(x + 3y/4)^2 = 25y^2/16$ soit $y = 2x$ ou $y = -x/2$.$y = 2x$ et $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$ donnent $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ et $(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$ et $y = -x/2$ conduit à une impasse. On retombe bien sur les résultats précédents.

Exercice 31. Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation cartésienne $z^2 - x^2 - y^2 = 1$.

1. Donner l'équation du plan tangent à S en un point (x_0, y_0, z_0).
2. Soit D la droite d'équations : $2x + y = 0$, $z = 0$. Déterminer les points M de $\mathcal{S}$ tels que le plan tangent à $\mathcal{S}$ en M est parallèle à D. (Contour apparent de $\mathcal{S}$ dans la direction de D)

Solution **31.** .

1. *On pose $f(x,y,z) = z^2 - x^2 - y^2 - 1$. On sait que le gradient de f en (x_0, y_0, z_0) est un vecteur normal au plan tangent en un point régulier.*
   Le plan tangent $\mathcal{P}_0$ est donc d'équation : $-x_0(x - x_0) - y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0) = 0$ ou encore $z_0 z - x_0 x - y_0 y = 1$.
2. *La doite $D = \{(t, -2t, 0),\ t \in \mathbb{R}\}$ est incluse dans $\mathcal{P}_0$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z_0 \times 0 - x_0 t + 2y_0 t = 1$, c'est-à-dire ssi $x_0 = 2y_0$.*
   Il faut bien sûr ajouter la condition $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$ et une condition nécessaire est suffisante et donc : $x_0 = 2y_0$, $z_0^2 = 1 + 5y_0^2$.

Exercice 32. Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

1. A quelle condition l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan $z = k$ contient-elle une droite ?
2. Déterminer les droites incluses dans $\mathcal{S}$ non parallèles à (xOy).
3. Montrer que celles-ci sont coplanaires.
4. Déterminer le plan tangent à $\mathcal{S}$ en chacun des points d'intersection de ces droites deux à deux ?

Solution **32.** .

1. *On pose $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 1$. Un vecteur directeur de la tangente de l'intersection est donnée par le produit vectoriel de grad$F(x,y,z) \wedge (0,0,1)$ si $(x,y) \neq 0$ qui vaut $3(x^2, y^2, 0)$.*
   On veut que la direction de ce vecteur soit constante le long d'une droite : $y = ax + b$, on déduit $a = \pm 1$ et $b = 0$; mais $a = 1$ ne peut être solution car par hypothèse on veut $z = k$ constant.
   Donc $k = 1$ et la droite est $(0,0,1) + \mathbb{R}(1,-1,0)$. De même si $x = ay + b$. La doite $(0,0,1) + \mathbb{R}(1,-1,0)$ est la seule.

2. *Si D est une droite non incluse dans (xOy), alors D passe par un point $(a,b,0)$ et un vecteur directeur de D peut s'écrire $(\alpha,\beta,1)$. Donc*

$$D=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\1\end{pmatrix},\quad \lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

On substitue dans l'équation

$$(1+\alpha^3+\beta^3)\lambda^3+(3a\alpha^2+3b\beta^2)\lambda^2+(3a^2\alpha+3b^2\beta)\lambda+a^3+b^3=1$$

dont on déduit

$$\begin{cases}1+\alpha^3+\beta^3=0\\ a^2\alpha+b^2\beta=0\\ a\alpha^2+b\beta^2=0\\ a^3+b^3=1\end{cases}\Rightarrow \alpha b^2\beta-ab\beta^2=0\iff b\beta(\alpha b-a\beta)=0$$

Si $b=0$, alors $a=1$, $\alpha=0$ et $\beta=-1$. Si $\beta=0$, alors $\alpha=-1$, $a=0$ et $b=1$.
Sinon, $a=\dfrac{\alpha}{\beta}b$ et la dernière équation donne $\left(1+\dfrac{\alpha^3}{\beta^3}\right)b^3=1$ et avec la première équation $b=-\beta$ et de même $a=-\alpha$. mais alors la deuxième équation donne $a=-b$, ce qui contredit la première équation.

3. *Les trois droites sont dans le plan $\mathcal{P}: x+y+z=1$*
4. *En conclusion, nous avons 3 trois droites qui se coupent en $(1,1,-1)$, $(1,-1,1)$ et $(-1,1,1)$ et à chaque fois, le plan tangent est $\mathcal{P}$.*

Exercice 33. ♡ Soient $\alpha_1>0,\dots,\alpha_n>0$ de somme 1,

$$f(x_1,\dots,x_n)=x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}.$$

On pose $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}_+\times\cdots\times\mathbb{R}_+=F$, puis

$$g(x_1,\dots,x_n):=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n-1$$

et enfin $K=\{(x_1,\dots,x_n)\in F: g(x_1,\dots,x_n)=0\}$.

1. Montrer que K est compact dans $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que f atteint sa borne sup sur K en au moins un point a $\in K$ tel que $f(a)>0$, puis calculer a.
3. Montrer que $f(tx)=tf(x)$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$. En déduire avec les question précédentes que $x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}\le\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n$ pour tous $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}_+\times\cdots\times\mathbb{R}_+,\alpha_1>0,\dots,\alpha_n>0$ de somme 1 (un argument de convexité eut été plus rapide...). Etudier le/les cas d'égalité
4. En déduire qu'à surface donnée, parmi les parallélipipèdes c'est le cube qui possède le plus grand volume.
5. En déduire aussi la très fameuse inégalité arithmético-géométrique :

$$(x_1x_2\dots x_n)^{1/n}\le\frac{x_1+\cdots+x_n}{n},\quad\forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}_+\times\cdots\times\mathbb{R}_+,$$

avec son cas d'égalité.

Solution **33.** . 1. *K fermé borné est compact dans $\mathbb{R}^n$.f étant continue sur K elle atteint donc son maximum en au moins un point $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in K$. En outre, comme f prends clairement des valeurs >0, on aura $f(a)>0$, en particulier $a_i>0$ pour tout $1\le i\le n$.*

2. *Les fonction f et g sont de classe C^1 sur l'ouvert $\Omega = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^n\right\}$ où la différentielle $dg\,(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ne s'annule jamais. On peut donc appliquer le théorème des extrema liés sur cet ouvert (bien remarquer que f de classe C^1 sur Ω est seulement continue sur $\bar{\Omega}$) : une condition nécessaire pour que f présente au point a un extremum sur $K \cap \Omega$ est qu'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $Df(a) = \lambda Dg(a)$. Soit*

$$\forall 1 \leq i \leq n : \quad \partial_{x_i} f(a) = \alpha_i \frac{f(a)}{a_i} = \lambda \partial_{x_i} g(a) = \lambda \alpha_i.$$

Soit $f(a) = \lambda a_1 = \cdots = \lambda a_n$ et $f(a) > 0$ et $g(a) = 0$ donnent finalement $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Ce point étant unique et étant assurés de l'existence d'un maximum $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est forcément le point recherché :

$$\forall x \in K : \quad f(x) = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \leq \sup_{x \in K} f(x) = f(a) = 1.$$

Observez que l'inégalité est stricte pour $x \neq a$.

3. *Pour le cas général, i.e. lorsque la somme $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ est seulement positive, on remplace $x = (x_1, \ldots, x_n)$ par $tx = (tx_1, \ldots, tx_n)$ où $t = (\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n)^{-1}$. On se retrouve alors dans la situation précédente et $f(tx) \leq 1$. Maintenant il suffit d'observer que f est homogène de degré $1 : f(tx) = tf(x)$ ce qui fournit exactement l'inégalité désirée lorsque $t > 0$, on la prolonge à $t = 0$ par continuité de f sur $\bar{\Omega}$:*

$$x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n,$$

pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+ \times \cdots \times \mathbb{R}_+, \alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_n > 0$ de somme 1. Enfin, on aura égalité si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$.

4. *Notons x, y, z les les longueurs des trois cotés de la boite. Son volume est $V = xyz$ et sa surface $S = 2(xy + xz + yz)$.Il est inutile de revoir ici un problème d'extremum lié et il suffit de bien appliquer la première question avec $n = 3$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/3$ et $X = (1/x, 1/y, 1/z)$ soit*

$$V^{-1/3} = \left(\frac{1}{xyz}\right)^{1/3} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{S}{6V}.$$

Donc $S \geq 6V^{2/3}$ avec égalité si, et seulement si $x = y = z$. L'emballage le plus économique correspond donc à la boite cubique.

5. *Si on choisit $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1/n$ on tombe sur l'inégalité arithmético-géométrique et son cas d'égalité.*

<u>**Exercice 34.**</u> Chercher les extrema locaux de la fonction $f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$ sous la contrainte $x + 2y = 24$ (on notera $g(x, y) = x + 2y$).

<u>Solution **34.**</u> **.** *Les fonctions f et g étant des fonctions polynômes dans les variables (x, y), elles sont définies sur $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$, qui est un ouvert. De plus f et g sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}^2$. On a : $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - 24) = 5x^2 + 6y^2 - xy - \lambda(x + 2y - 24)$.*
Les dérivées partielles $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 10x - y - \lambda$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 12y - x - 2\lambda$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 24 - x - 2y$.
Un point (x, y, λ) est stationnaire si et seulement si

$$\begin{cases} 10x - y - \lambda = 0 \\ 12y - x - 2\lambda = 0 \\ 24 - x - 2y = 0 \end{cases}$$

On obtient comme seul point critique : $(x, y, \lambda) = (6, 9, 51)$. Le point $(x, y) = (6, 9)$ est un minimum local.

<u>**Exercice 35.**</u> ♡ Étudier les extrema de la fonction sur le carré $[-1, 1]^2$. $f(x, y) = (x - 1)^2 + 2y^2$

<u>Solution **35.**</u> **.** *On calcule le gradient :*

$$\nabla f(x, y) = (2x - 2, 4y)$$

On cherche les points critiques comme solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x f(x,y) = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x - 2 = 0 \\ 4y = 0 \end{array} \right.$$

La seule solution du système est donnée par le point $P = (1,0)$.
On calcule la matrice hessienne :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice hessienne est constante :

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant et la trace de l'hessienne :

$$\det H_f(1,0) = 8 > 0, \quad \mathrm{tr}\,(H_f(1,0)) = 6 > 0$$

Dès que les déterminant (resp. la trace) est le produit (resp. la somme) des deux valeurs propres de $H_f(1,0)$, on peut conclure que les valeurs propres de $H_f(1,0)$ sont strictement positives. Cela c'est equivalent à dire que $H_f(1,0)$ est semi-définie positive. Par consequence P *est un point de minimum pour f. Ce qui était facile à voir !*
Le maximum est sur le bord.

Fonctions de plusieurs variables

(Solutions)