Fonctions définies par une intégrale

1 Théorèmes de convergence dominée

Exercice 1. * Soit θ un réel non congru à 0 modulo 2π.

1. Démontrer que
$$\mathrm{Re}\left(\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}dx\right) = -\ln\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|.$$
2. Démontrer que
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 e^{i(n+1)\theta}x^n = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}dx.$$
3. Conclure que
$$\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|.$$

Exercice 2. ♡* Montrer que
$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

Exercice 3. * Soit (a_n) une suite de nombres complexes telle que $\sum_n a_n n!$ converge absolument. Démontrer que
$$\int_0^{+\infty}\left(e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n\right)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n n!.$$

Exercice 4. ♡* Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{\exp(x)-1}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Exercice 5. ♡** Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\exp(x)-1}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

2 Fonctions définies par une intégrale

Exercice 6. ♡* Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)d\theta.$$

1. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle
$$xf''(x)+f'(x)+xf(x)=0.$$

Exercice 7. ** Pour $x>0$, on définit
$$f(x) = \int_0^{\pi/2}\frac{\cos(t)}{t+x}dt.$$

1. Justifier que f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, et étudier les variations de f.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. En utilisant $1-\frac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1$, valable pour $t \in [0,\pi/2]$, démontrer que
$$f(x) \sim_{0^+} -\ln x.$$
4. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 8. ** On pose, pour $x > 0$,
$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-tx}}{1+t^2}\,dt.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.
2. Trouver un équivalent simple de f en $+\infty$.
3. Montrer que $xf(x)$ vérifie une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants.
4. Montrer que $g(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t+x}dt$ vérifie l'équation $y'' + y = \dfrac{1}{x}$.
5. En déduire un équivalent de f en 0.
6. En déduire $g(0)$

Exercice 9. ♡** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞.

1. On suppose que $f(0) = 0$ et on pose, pour $x \neq 0$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Justifier que, pour $x \neq 0$, $g(x) = \int_0^1 f'(tx)dt$, et en déduire que g se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose désormais que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$ et on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x^n}$, $x \neq 0$. Justifier que g se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10. ** On pose, pour $a > 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}e^{-at^2}dt$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$F'(x) = \frac{-x}{2a}F(x).$$
2. En déduire que pour tout x réel, $F(x) = F(0)e^{-x^2/4a}$, puis que
$$F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-x^2/4a}.$$

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$.

Exercice 11. ♡** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $Lf(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$.

1. Montrer que si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ converge, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-yt}dt$ converge pour $y > x$.
2. Quelle est la nature de l'ensemble de définition de Lf ?
3. On suppose f bornée. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} Lf(x) = 0$.

Exercice 12. *(Théorème de Fubini)**** Soit $I = [a,b]$ et $J = [c,d]$. Soit f continue sur $J \times I$. Alors
$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\,dx\right) dt = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\,dt\right) dx$$

Intégration

(Solutions)

Solution 1.

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}d\theta$ est continue sur $[0,1]$ (le dénominateur ne s'annule pas). Il n'y a pas de problèmes d'intégrabilité, et il s'agit juste d'un calcul d'intégrales :

$$\begin{aligned}
\Re e\left(\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}dx\right) &= \int_0^1 \Re e\left(\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}dx\right) \\
&= \int_0^1 \frac{\cos\theta - x}{1-2x\cos\theta + x^2}dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}\ln\left(1-2x\cos\theta+x^2\right)\right]_0^1 \\
&= -\ln\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|.
\end{aligned}$$

2. Posons $S_N(x) = \sum_{n=0}^N e^{i(n+1)\theta}x^n$. On a

$$S_N(x) = \frac{e^{i\theta} - e^{i(N+2)\theta}x^{N+1}}{1-e^{i\theta}x}$$

soit

$$|S_N(x)| \leq \frac{2}{|1-e^{i\theta}x|}.$$

Cette dernière fonction est intégrable sur $[0,1]$ et ne dépend pas de N. De plus, pour tout $x \in]0,1[$, $S_N(x)$ converge vers $\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta x}}$ lorsque N tend vers $+\infty$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 e^{i(n+1)\theta}x^n = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}dx.$$

3. La première somme apparaissant ci-dessus vaut encore $\sum_{n\geq 1}\dfrac{e^{in\theta}}{n}$. Il suffit alors de prendre la partie réelle de l'égalité et d'appliquer le résultat de la première question.

Solution 2. Pour $x \in [0,1[$, on peut écrire

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$$

et pour $x \in]0,1[$, on a

$$\frac{(\ln x)^2}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}(\ln x)^2$$

Considérons alors la série des fonctions

$$u_n(x) = (-1)^n x^{2n}(\ln x)^2$$

Par convergence des séries précédentes, la série des fonctions u_n converge simplement vers la fonction $x \mapsto (\ln x)^2/\left(1+x^2\right)$. Les fonctions u_n et la fonction somme sont continues par morceaux. Chaque fonction u_n est intégrable et

$$\int_0^1 |u_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{2n}(\ln x)^2\ \mathrm{d}x$$

Par intégration par parties, on montre

$$\int_0^1 x^{2n}(\ln x)^2\ \mathrm{d}x = \frac{2}{(2n+1)^3}$$

On peut alors appliquer le théorème d'intégration terme à terme et affirmer

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

Solution 3. Posons $S_N(x) = e^{-x}\sum_{n=0}^N a_n x^n$. Pour chaque $R>0$, la série $\sum_{n=0}^N a_n x^n$ converge normalement sur l'intervalle $[0,R]$, d'après la majoration $|a_n x^n| \leq |a_n| R^n \leq a_n n!$, la dernière inégalité étant valable pour n assez grand. Ainsi, S_N converge sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $S(x) = e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+$. D'autre part, on a

$$|S_N(x)| \leq e^{-x}\sum_{n=0}^N |a_n| x^n \leq e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|x^n.$$

Cette dernière fonction est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. En effet, d'après le théorème de convergence monotone, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x}|a_n|x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|n!.\end{aligned}$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, et on obtient

$$\int_0^{+\infty}\left(e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n\right)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} a_n e^{-x}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!.$$

Solution 4. On écrit

$$\frac{x}{\exp(x)-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} x e^{-nx}$$

La série est convergente vers une fonction continue. De plus,

$$\int_0^{+\infty}|xe^{-nx}| = \left[(-\frac{1}{n}x - \frac{1}{n^2})e^{-nx}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^2}$$

On peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme puisque $\sum\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge. Le résultat est alors immédiat.

Solution 5. On écrit

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\exp(x)-1}\,dx &= \int_0^{+\infty}\sin x\frac{\exp(-x)}{1-\exp(-x)}\,dx \\ &= \int_0^{+\infty}\sin x\sum_{n=1}^{+\infty}\exp(-nx)\,dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sin x\exp(-nx)\,dx\end{aligned}$$

L'interversion étant licite car l'hypothèse de domination est vérifiée :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left|\sum_{k=1}^{n} \exp(-nx)\sin x\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \exp(-nx)|\sin x| \leq \frac{|\sin x|}{\exp(x)-1}$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Les autres hypothèses du théorème de convergence dominée sont immédiates. Peut-on utiliser le théorème d'interversion terme à terme ou de convergence uniforme ?
On termine le calcul en remarquant que $\sin x \exp(-nx)$ est la partie imaginaire de $\exp((i-n)x)$.

Solution 6. 1. Posons $u(x,\theta) = \cos(x\sin\theta)$, définie sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$. u est de classe C^∞, ses dérivées partielles du premier et second ordre par rapport à x étant

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\theta) = -\sin(\theta)\sin(x\sin\theta) \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin^2(\theta)\cos(x\sin\theta).$$

On vérifie bien que ces dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$, ce qui, par théorème d'intégration sur un segment, implique que f est de classe C^2. On en déduit

$$f'(x) = \int_0^\pi -\sin(\theta)\sin(x\sin\theta)d\theta, \;\; f''(x) = \int_0^\pi -\sin^2(\theta)\cos(x\sin\theta)d\theta.$$

2. Utilisant $-\sin^2\theta = \cos^2\theta - 1$, on a

$$xf''(x) + xf(x) = \int_0^\pi x\cos^2\theta\cos(x\sin\theta)d\theta = \int_0^\pi \cos\theta \times \big(x\cos(\theta)\cos(x\sin\theta)\big)d\theta.$$

On réalise alors une intégration par parties dans cette dernière intégrale, pour trouver

$$xf''(x) + xf(x) = -f'(x).$$

Solution 7.

1. Posons $u(x,t) = \frac{\cos(t)}{t+x}$, définie et continue sur $]0,+\infty[\times[0,\pi/2]$. Cette fonction admet une dérivée partielle par rapport à x donnée par

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{-\cos(t)}{(t+x)^2}.$$

Cette dérivée partielle est elle-même continue sur $]0,+\infty[\times[0,\pi/2]$. Par théorème d'intégration (on travaille sur un segment), on en déduit que f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que

$$f'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{-\cos(t)}{(t+x)^2}dt \leq 0.$$

Ainsi, f est décroissante sur $]0,+\infty[$.

2. Il n'est pas besoin d'appliquer un théorème sophistiqué. Ici, on a en effet

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{t+x}dt = \ln\left(\frac{x+\pi/2}{x}\right) \to 0.$$

Par le théorème d'encadrement, f tend vers 0 en $+\infty$.

3. Par encadrement, on a donc

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{t+x}dt - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{t+x}dt \leq f(x) \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{t+x}dt,$$

soit

$$-\ln(x) + \ln(x+\pi/2) - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{t+x}dt \leq f(x) \leq -\ln(x) + \ln(x+\pi/2).$$

Le seul terme qui pose encore problème est l'intégrale. Mais, on remarque que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{t+x} dt \leq \int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{t} dt = \frac{\pi}{4}.$$

Il vient

$$-\ln(x) + \ln(x+\pi/2) - \frac{\pi}{8} \leq f(x) \leq -\ln(x) + \ln(x+\pi/2).$$

Il suffit ensuite de diviser par $-\ln x$ et de faire tendre x vers 0 pour en déduire le résultat voulu.

4. Il suffit d'encadrer le plus simplement possible le dénominateur. En effet, on a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{x+\pi/2} dt \leq f(x) \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{x}.$$

Il vient

$$\frac{1}{x+\pi/2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$

et donc

$$f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}.$$

On pouvait aussi utiliser le changement de variables $u = x + yt$, ainsi qu'on le fait dans l'exercice suyivant.

Solution 8.

1. On étudie $\varphi(x) = \frac{\pi}{2} - xf(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
   φ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$, la fonction de domination est $\frac{1}{1+t^2}$.
   La fonction est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec sur $[a, +\infty[$, $a > 0$

$$\left|\frac{te^{-tx}}{1+t^2}\right| \leq \frac{te^{-at}}{1+t^2}.$$

   Enfin φ est $\mathcal{C}^2$ avec sur $[a, +\infty[$, $a > 0$

$$\left|\frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\right| \leq \frac{t^2e^{-at}}{1+t^2}.$$

   Les fonctions $t \mapsto t\frac{-at^2}{1+t^2}$ et $t \mapsto t\frac{-at^2}{1+t^2}$ car $t \mapsto te^{-at}$ et $t \mapsto t^2e^{-at}$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$ (de limite nulle en $+\infty$).
   On obtient

$$\varphi''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \varphi$$

2. Pour tout $x > 0$

$$|\varphi(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt \leq \frac{1}{x}.$$

   On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ et donc $f(x) \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2x}$.
3. φ vérifie l'équation différentielle $\varphi'' + \varphi = \frac{1}{x}$.
4. Le changement de variable affine $u = t + x$ montre que

$$g(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t+x} dt = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u+x)}{u}\, du = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du + \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\, du$$

On en déduit que l'intégrale est bien définie et que g est bien de classe $\mathcal{C}^2$ et est solution de $y'' + y = \dfrac{1}{x}$. On en déduit qu'il existe des constantes A et θ telles que $\varphi(x) = g(x) + 1\cos(x+\theta)$.
Le thérème d'intersersion limite intégrale montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi = 0$.
De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} g = 0$ (les fonctions sin et cos sont bornées et les intégrales tendent vers 0. On en déduit que $g = \varphi$.
De plus, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ admet une limite en 0 car l'intégrale est convergente sur $\mathbb{R}_+$ (ipp).
De même, l'intgérale en cos converge et pour $x < 1$

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du = \int_x^1 \frac{1}{u}\,du + \int_x^1 \frac{\cos(u)-1}{u}\,du + \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$$

dont on déduit que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du \sim_0 -\ln x$.
En revnant à f, on obtient $f(x) \sim_0 -\ln x$.

5. $g(x) = \varphi(x)$

Solution 9.

1. Puisque $f(0) = 0$, le théorème fondamental du calcul intégral nous garantit que

$$f(x) = \int_0^x f'(u)du.$$

Effectuons le changement de variables $u = xt$, $du = xdt$. On obtient

$$f(x) = x\int_0^1 f'(tx)dt,$$

ce qui est le résultat demandé. Mais la formule

$$g(x) = \int_0^1 f'(tx)dt$$

a un sens pour $x = 0$, et de plus, puisque $(t,x) \mapsto f'(tx)$ est de classe C^∞ sur $[0,1]\times\mathbb{R}$ et qu'on intègre sur le segment $[0,1]$, on en déduit que cette formule définit une fonction de classe C^∞. Ainsi, g se prolonge en une fonction C^∞ avec $g'(0) = \int_0^1 f'(0)dt = f'(0)$.

2. C'est la même méthode, mais on remplace l'utilisation du théorème fondamental du calcul intégral par la formule de Taylor avec reste intégral. On a donc, puisque toutes les dérivées en 0 jusqu'à l'ordre $n-1$ sont nulles,

$$f(x) = \int_0^x (x-u)^{n-1}\frac{f^{(n)}(u)}{(n-1)!}du.$$

On pose encore $u = tx$, de sorte que

$$f(x) = \int_0^1 (x-xt)^{n-1}\frac{f^{(n)}(tx)}{(n-1)!}xdt$$

soit

$$g(x) = \int_0^1 (1-t)^{n-1}\frac{f^{(n)}(tx)}{(n-1)!}dt.$$

Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente, ceci définit une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, avec $g(0) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Solution 10.

1. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$|e^{-itx}e^{-at^2}| = e^{-at^2}$$
qui est une fonction intégrable sur $]0, +\infty[$ puisque $a > 0$. Ceci démontre à la fois que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et aussi que F est continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'on a majoré l'intégrande (qui est continue) par une fonction intégrable ne dépendant pas de x. De plus, la fonction $(x,t) \mapsto e^{-itx}e^{-at^2}$ est de classe C^1, et sa dérivée partielle par rapport à x est $(x,t) \mapsto -ite^{-itx}e^{-at^2}$. Cette fonction vérifie
$$|-ite^{-itx}e^{-at^2}| \leq |t|e^{-at^2}$$
qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ et indépendante de x. Ceci prouve que F est C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée
$$F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -ite^{-itx}e^{-at^2}dt.$$
Une intégration par parties permet de se ramener à F :
$$\begin{aligned} F'(x) &= \left[\frac{i}{2a}e^{-at^2}e^{-itx}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{2a}e^{-at^2}(-ixe^{-itx})dt \\ &= -\frac{x}{2a}F(x). \end{aligned}$$

2. On résoud l'équation différentielle vérifiée par F : $F(x) = F(0)e^{-x^2/4a}$. De plus,
$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\frac{du}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Solution 11.

1. On pose $F(u) = \int_0^u f(t)e^{-xt}dt$. Alors,
$$\int_0^X f(t)e^{-yt}dt = \int_0^X f(t)e^{-xt}e^{-(y-x)t}dt = \int_0^X F'(t)e^{-(y-x)t}dt.$$
On réalise une intégration par parties, et on trouve :
$$\int_0^X f(t)e^{-yt}dt = F(X)e^{-(y-x)X} + (y-x)\int_0^X F(t)e^{-(y-x)t}dt.$$
Maintenant, F est majorée sur $[0, +\infty[$ (c'est une fonction continue qui admet une limite en $+\infty$). Quand X tend vers $+\infty$, $\int_0^X F(t)e^{-(y-x)t}dt$ admet donc une limite (l'intégrale est absolument convergente), et $F(X)e^{-(y-x)X}$ converge vers 0.
2. L'ensemble de définition est donc un intervalle non-borné à droite, c'est-à-dire ou bien $]-\infty, +\infty[$, $]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$.
3. Il s'agit d'une simple application du théorème de convergence dominée : soit M un majorant de $|f|$. Pour $x > 1$, on a
$$|f(t)e^{-xt}| \leq Me^{-t}$$
qui est une fonction intégrable. D'autre part, pour chaque $t > 0$ fixé,
$$\lim_{x\to+\infty} f(t)e^{-xt}dt = 0.$$
D'après le théorème de convergence dominée, on a $\lim_{x\to+\infty} Lf(x) = 0$.

Solution 12. On pose
$$\psi(x,y) = \int_a^y f(x,t)\,dt \quad \text{et} \quad H(y) = \int_c^d \psi(x,y)\,dx.$$

En particulier $\psi(x,a)=0$, donc $H(a)=0$. D'autre part

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) = f(x,y)$$

est continue sur $I \times J$. Donc H est dérivable, et

$$H'(t) = \int_c^d \frac{\partial \psi}{\partial t}(x,t)\,dx = \int_c^d f(x,t)\,dx.$$

Alors

$$H(b) = \int_a^b H'(t)\,dt = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\,dx \right)\,dt,$$

mais aussi

$$H(b) = \int_c^d \psi(x,b)\,dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\,dt \right)\,dx,$$

ce qui donne le résultat attendu.