Feuille de T.D. n° 16

Équations différentielles

Déjà vu sur les équations différentielles :

— et la diagonalisation ▷ **IV.2** ou la trigonalisation ▷ **TD4.9** ;

— et les séries entières ▷ **TD9.5&8, Kdo du 17/12/2024** ;

— et les intégrales à paramètre ▷ **TD13.2&11** ;

— et les révisions ▷ **exo 5 du thème n° 2, exo 8&9 du thème n°3**.

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles

1. $x'' - 3x' + 2x = te^{2t}$ et $x'' - 2\sqrt{2}x' + 2x = 6$;
2. $(t^2+1)^2x'' + 2t(t^2+1)x' + x = 0$ en cherchant d'abord une solution de la forme $(1+t^2)^\alpha$.

Exercice 2 (séries entières)**.** On note F l'application

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt.$$

1. Montrer que la fonction F est une solution, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle
$$(E) \qquad y'(x) = -2xy(x) + 1.$$
2. En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E).
3. Montrer que la fonction qui, à tout réel x, associe $\int_0^x e^{t^2}\,dt$ est développable en série entière sur $]-\infty, +\infty[$ et déterminer les coefficients de ce développement.
4. Montrer que F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et déterminer une relation de récurrence vérifiée par les coefficients a_n de ce développement.
5. Pour tout entier naturel p, exprimer a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p.
6. En déduire, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la somme
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}.$$

Exercice 3 (intégrales impropres & variation de la constante – tiré d'un oral CCP PC 2010)**.**

Soient l'équation différentielle (E) : $y' - y = e^{-x^2}$ et la fonction $u\colon x \mapsto \int_0^x e^{-t^2-t}\,dt$.

1. Montrer que u possède des limites finies quand x tend vers $\pm\infty$.
2. Exprimer les solutions de (E) en fonction de u.
3. Montrer que les solutions de (E) ont toutes pour limite zéro en $-\infty$.
4. Montrer qu'il existe une unique solution de (E) qui a pour limite zéro en $+\infty$.

Exercice 4 (diagonalisation & variation des constantes)**.** Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ du système différentiel :

$$\begin{cases} x' = y + z + e^t \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$$

Exercice 5. 1. Soient deux réels $\omega > 0$ et $V > 0$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les deux systèmes d'équations différentielles

$$(E)\ \begin{cases} x' = -\omega \cdot y \\ y' = +\omega \cdot x \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (F)\ \begin{cases} x' = -\omega \cdot y \\ y' = +\omega \cdot x \\ z' = V \end{cases}.$$

2. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Soit $\vec{\omega}$ un vecteur non nul de E. On définit les deux fonctions

$$f : E \to \mathbb{R},\ \vec{x} \mapsto \|\vec{x}\|^2 \quad \text{et} \quad g : E \to \mathbb{R},\ \vec{x} \mapsto \langle \vec{\omega}, \vec{x} \rangle.$$

Soit $M : I \to E,\ t \mapsto M(t)$ une solution sur I de l'équation différentielle $\vec{x}'(t) = \vec{\omega} \wedge \vec{x}(t)$. Montrer les deux fonctions $f \circ M$ et $g \circ M$ sont constantes sur I. Qu'en déduire ?

3. Soit un entier n impair. Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$: $A^T = -A$.
   (a) Montrer que A n'est pas inversible et que, pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T A X = 0$.
   (b) Soit $M : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ t \mapsto M(t)$ une solution sur I de l'équation différentielle $X'(t) = A \cdot X(t)$. Montrer qu'il existe un vecteur colonne non nul $\Omega \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que les fonctions

$$t \mapsto M(t)^T \cdot M(t) \quad \text{et} \quad t \mapsto \Omega^T \cdot M(t)$$

sont constantes sur I.

Exercice 6. Soient les équations différentielles

$$(E) \quad x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x) \qquad \text{et} \qquad (E_0) \quad x^2y'' + 4xy' + 2y = 0.$$

1. Déterminer les solutions de la forme $x \mapsto x^\alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$) de (E_0).
2. En déduire la solution générale sur $]0, +\infty[$ de (E_0).
3. Rappeler le développement en série entiére de $x \mapsto \ln(1+x)$ ainsi que le rayon de convergence de cette série entiére.
4. (a) Rechercher le développement en série entiére d'une solution f de (E) et calculer le rayon de convergence R de cette série entière.
   (b) Exprimer $f(x)$ pour tout $x \in]-R, 0[\cup]0, +R[$ à l'aide de fonctions usuelles.
5. Quelle est la solution générale de l'équation (E) sur l'intervalle $]0, 1[$?

Exercice 7. Soient un intervalle I de $\mathbb{R}$, deux fonctions continues $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ et l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 sans second membre

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0.$$

Soient $x_1 : I \to \mathbb{R}$ et $x_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions sur I de cette équation. La fonction

$$W : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$$

est appelée le **wronskien** de x_1 et x_2.

1. Montrer que W est dérivable et que, pour tout $t \in I$,

$$W'(t) = -a(t)W(t).$$

2. Montrer que : si les solutions x_1 et x_2 sont linéairement indépendantes, alors leur wronskien ne s'annule jamais.
3. Montrer que, si x_1 ne s'annule pas, alors

$$\forall t \in I, \left(\frac{x_2}{x_1}\right)'(t) = \frac{W(t)}{x_1^2(t)}.$$

4. Soient $x_1 : I \to \mathbb{R}$ et $x_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions linéairement indépendantes. Montrer que x_1 et x_2 n'ont pas de racine commune. Et que, entre deux racines distinctes de x_2 (si elles existent), x_1 possède au moins une racine.
5. On suppose connue une solution $x_1 : I \to \mathbb{R}$ ne s'annulant pas. En utilisant le wronskien, déterminer une solution $x_2 : I \to \mathbb{R}$ linéairement indépendante de x_1.

En ligne sur le Cahier de prépa : le sujet CCINP PSI 2023 Math et son corrigé, dans le dossier Révisions. L'exercice porte sur la fonction de Bessel (intégrales à paramètre, équa. diff., séries entières). Il est suivi de deux problèmes : l'un sur les variables aléatoires et l'autre sur les suites de matrices.