

Merci à:

Louis

Pages

MPIK

TD

15.

Corrigé de l'exo VII.

1) Comme la fonction $\ln$ est concave (car: $\forall x > 0, \ln''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$),
d'après l'inégalité de Jensen:

$$\forall a, b, c > 0, \ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geq \frac{1}{3}(\ln a + \ln b + \ln c) \quad \text{car } \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$
$$\geq \frac{1}{3} \ln abc$$

d'où en appliquant la fonction exponentielle qui est $\boxtimes$ croissante sur $\mathbb{R}$

$$\forall a, b, c > 0, \frac{a+b+c}{3} \geq \exp\left(\frac{1}{3} \ln abc\right) \geq \frac{a+b+c}{3}$$

$$\forall a, b, c > 0, \frac{a+b+c}{3} \geq \exp\left(\frac{1}{3} \ln abc\right) \geq \sqrt[3]{abc}$$

ANALYSE:

2) Soit α un extremum local de la fonction $f_{\alpha}(x, y)$
que l'on note

Alors (x, y) est un point critique de f car cette fonction est $\mathcal{C}^1$
d'après les théorèmes généraux, donc est différentiable, et car
 $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ est un ouvert en tant que produit cartésien d'ouverts.

$$\text{D'où } \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = (0, 0)$$

$$\text{i.e. } \left(1 - \frac{1}{x^2 y}, 1 - \frac{1}{y^2 x} \right) = (0, 0)$$

$$\text{donc } \begin{cases} x^2 y = 1 \\ y^2 x = 1 \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \frac{1}{y^3} = 1 \\ x = \frac{1}{y^2} \end{cases}$$

car $y \neq 0$

donc $(x, y) \in \{ (1, 1) \}$ car $y > 0$.

Synthèse:

Réciproquement, ~~on appliquant l'inégalité~~ soit $x, y > 0$.
En appliquant l'inégalité de 1) à $a=x, b=y, c=\frac{1}{xy}$, on a :

$$\sqrt[3]{xy \frac{1}{xy}} \leq \frac{f(x,y)}{3} \quad \text{i.e.} \quad f(x,y) \geq 3.$$

D'où: $\forall x, y > 0, f(x,y) \geq f(1,1)$

Donc le point $(1,1)$ est ~~un maximum~~ ^{il y a minimum} global de la fonction f ,
et c'est même l'unique ^{local} extremum de f .