Thème n° 4

Corrigé de l'exercice 10

26 mars 2025

1. (a) $J^2 = (Z^tZ)(Z^tZ) = Z({}^tZZ)^tZ = nZ^tZ = nJ$, d'où :

$$P^2 = I_n + \frac{1}{n^2}J^2 - \frac{2}{n}J = I_n - \frac{1}{n}J = P$$

Donc π est un projecteur.

(b) Pour tout vecteur X orthogonal à Z,

$$PX = X - \frac{1}{n}Z^tZX = X,$$

d'où $\mathrm{Vect}(Z)^\perp \subset \mathrm{Im}(\pi)$. Et

$$PZ = Z - \frac{1}{n}Z^tZZ = 0,$$

donc $\mathrm{Vect}(Z) \subset \mathrm{Ker}(\pi)$. De plus, $\mathrm{Vect}(Z)$ et $\mathrm{Vect}(Z)^\perp$ étant supplémentaires, la somme de leurs dimensions vaut n. D'après le théorème du rang, la somme des dimensions du noyau et de l'image vaut aussi n. Donc

$$\mathrm{Im}(\pi) = \mathrm{Vect}(Z)^\perp \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{Vect}(Z).$$

(c) Le projecteur π projette sur son image parallèlement à son noyau. Or ce noyau et cette image sont des *sev* orthogonaux, donc π est un projecteur orthogonal.

2. (a) Pour tout $M \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$,

$$\Phi(\Phi(M)) = P\Phi(M)P = P^2MP^2 = PMP = \Phi(M)$$

car $P^2 = P$. Donc Φ est un projecteur.

(b)

$$\forall M, N,\ (\Phi(M)|N) = \mathrm{Tr}({}^tP^tM^tPN) = \mathrm{Tr}(P^tMPN) = \mathrm{Tr}({}^tMPNP) = (M|\Phi(N))$$

(on a utilisé les propriétés $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ et ${}^tP = P$). Donc Φ est un endomorphisme autoadjoint.

(c) Le noyau et l'image d'un endomorphisme autoadjoint sont orthogonaux ▷ **XII.13**. En effet, si $A \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ et $B \in \mathrm{Im}(\Phi)$, alors il existe une matrice M telle que $B = \Phi(M)$, d'où $(A|B) = (A|\Phi(M)) = (\Phi(A)|M) = 0$.

Le projecteur Φ projette sur son image parallèlement à son noyau. Or ce noyau et cette image sont des *sev* orthogonaux, donc Φ est un projecteur orthogonal.

(d) Procédons par double inclusion :

— Supposons que $M \in \mathrm{Im}(\Phi)$. Alors $PMP = M$ car Φ est un projecteur, donc

$$\begin{cases} MZ = PMPZ = PM0 = 0 \\ {}^tMZ = {}^tP^tM^tPZ = P^tMPZ = P^tM0 = 0 \end{cases}.$$

— Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ telle que $MZ = {}^tMZ = 0$. Alors

$$\Phi(M)Z = PMPZ = 0 = MZ,$$

d'où : $\forall X \in \mathrm{Vect}(Z),\ \Phi(M)X = MX$.
Par ailleurs, $\langle MX, Z\rangle = \langle X, {}^tMZ\rangle = 0$, d'où $MX \in \mathrm{Vect}(Z)^\perp$. Parce que π agit comme l'identité sur $\mathrm{Vect}(Z)^\perp$ d'après 1b, on a aussi :

$$\forall X \in \mathrm{Vect}(Z)^\perp,\ \Phi(M)X = PMPX = PMX = MX.$$

Or $\mathrm{Vect}(Z)$ et $\mathrm{Vect}(Z)^\perp$ sont supplémentaires. On en déduit que $MX = \Phi(M)X$ pour tout vecteur X, d'où $\Phi(M) = M$, donc $M \in \mathrm{Im}(\Phi)$.

On a ainsi montré que :

$$\mathrm{Im}(\Phi) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid\ MZ = {}^tMZ = 0\}.$$