

CORRIGÉ DE LA FEUILLE DE T.D. N° 15

Calcul différentiel

13 MARS 2025

Exercice 1 (Dériver suivant un vecteur). Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimensions finies. Soient un ouvert $U \subset E$, un point $a \in U$ et un vecteur $v \in E$. On dit qu'une fonction $f : U \rightarrow F$ est dérivable en le point a suivant le vecteur v si le vecteur

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

existe. On note alors ce vecteur $D_v f(a)$ et on l'appelle la dérivée de f en a suivant v .

1. Montrer que : si f est dérivable en a suivant tout vecteur v , alors f admet des dérivées partielles en a .
2. Soit $g(x, y) = \frac{x^2 \cdot y}{x^4 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $g(0, 0) = 0$.
 - (a) Montrer que la fonction g n'est pas continue en $(0, 0)$.
 - (b) Montrer que g est dérivable en $(0, 0)$ suivant tout vecteur (x, y) .
3. Montrer que : si f est différentiable en a , alors f est dérivable en a suivant tout vecteur v et

$$D_v f(a) = df(a) \cdot v.$$

La réciproque est-elle vraie ?

-
1. La fonction f est dérivable en a suivant chaque vecteur de base e_i . D'où $\frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} D_{e_i} f(a)$. Donc $\partial_i f(a)$ existe et est égal à $D_{e_i} f(a)$.
 2. (a) La fonction g n'est pas continue en $(0, 0)$ car $(x, x^2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} (0, 0)$ mais $g(x, x^2) = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers $g(0, 0) = 0$.
 (b) Soient $a = (0, 0)$ et $v = (x, y) \neq (0, 0)$. Alors $\frac{g(a + tv) - g(a)}{t} = \frac{g(tx, ty)}{t} = \frac{t^2 x^2 y}{t^4 x^4 + t^2 y^2}$, d'où :
 - (premier cas) si $y \neq 0$, alors $\frac{g(tx, ty)}{t} = \frac{x^2 y}{t^2 x^4 + y^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{x^2}{y}$;
 - (second cas) si $y = 0$, alors $\frac{g(tx, ty)}{t} = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$.

Donc g est dérivable en $(0, 0)$ suivant tout vecteur et $D_{(x, y)} g(0, 0)$ est égal à $\frac{x^2}{y}$ si $y \neq 0$ et est égal à 0 si $y = 0$.

3. Soit $v \in E$. Si f est différentiable en a , alors $f(a + tv) = f(a) + df(a) \cdot tv + \|tv\| \varepsilon(tv)$.
 D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$: $\frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = df(a) \cdot v + \|v\| \varepsilon(tv) \xrightarrow{t \rightarrow 0} df(a) \cdot v$. Donc f est dérivable en a suivant v et $D_v f(a) = df(a) \cdot v$.

La réciproque est fautive : la question précédente exhibe un contre-exemple. En effet, elle est dérivable en $(0, 0)$ suivant tout vecteur mais elle n'est pas continue en $(0, 0)$, donc a fortiori pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, U un ouvert de E , a un élément de U et deux fonctions

$$\lambda : E \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f : E \rightarrow E.$$

différentiables en a . Montrer que la fonction

$$\lambda f : E \rightarrow E, x \mapsto \lambda(x) f(x)$$

est différentiable en a et que

$$d(\lambda f)(a) = f(a) d\lambda(a) + \lambda(a) df(a).$$

$$\begin{aligned}
(\lambda f)(a+h) &= \lambda(a+h)f(a+h) = [\lambda(a) + d\lambda(a) \cdot h + \|h\|\varepsilon_1(h)] [f(a) + df(a) \cdot h + \|h\|\varepsilon_2(h)] \\
&= \lambda(a)f(a) + \underbrace{d\lambda(a) \cdot h[f(a) + \lambda(a)df(a) \cdot h]}_{L(h)} + \underbrace{d\lambda(a) \cdot hdf(a) \cdot h + \|h\|\varepsilon_1(h)[f(a) + df(a) \cdot h + \|h\|\varepsilon_2(h)] + [\lambda(a) + d\lambda(a) \cdot h]\|h\|\varepsilon_2(h)}_{R(h)}.
\end{aligned}$$

Le reste $R(h)$ est un $o(\|h\|)$ car

$$\frac{R(h)}{\|h\|} = d\lambda(a) \cdot hdf(a) \cdot \frac{h}{\|h\|} + \varepsilon_1(h) [f(a) + df(a) \cdot h + \|h\|\varepsilon_2(h)] + [\lambda(a) + d\lambda(a) \cdot h]\varepsilon_2(h) \text{ tend vers } 0 \text{ car :}$$

- $d\lambda(a) \cdot h$ tend vers 0 et $\left\| df(a) \cdot \frac{h}{\|h\|} \right\| \leq \|df_a\|$;
- $\varepsilon_1(h)$ tend vers 0 et $[f(a) + df(a) \cdot h + \|h\|\varepsilon_2(h)]$ tend vers $f(a)$;
- $\lambda(a) + d\lambda(a) \cdot h$ tend vers $\lambda(a)$ et $\varepsilon_2(h)$ tend vers 0.

Et $L : h \mapsto d\lambda_a(h)[f(a) + \lambda(a)df(a) \cdot h]$ est linéaire et continue, donc λf est différentiable en a et $d(\lambda f)(a) = f(a)d\lambda(a) + \lambda(a)df(a)$.

Exercice 3 (Le gradient en coordonnées cylindriques). La fonction

$$M : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \varphi, z) \mapsto (x, y, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$$

change les coordonnées cylindriques (r, φ, z) en coordonnées cartésiennes (x, y, z) .

1. Calculer la matrice jacobienne $J_f(r, \varphi, z)$.
2. Représenter sur un dessin les coordonnées cylindriques (r, φ, z) d'un point M et les trois vecteurs colonnes de la jacobienne.
3. Exprimer le gradient en coordonnées cylindriques.

Exercice 4. Soit U et V les parties de $\mathbb{R}^2$ définies par

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\} \quad \text{et} \quad V = \{(s, p) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 - 4p > 0\}.$$

1. Représenter sur deux figures les ensembles U et V .
2. Montrer que U et V sont des ouverts de l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que : si $(x, y) \in U$, alors $(x + y, xy) \in V$.
4. Montrer que la fonction $f : U \rightarrow V, (x, y) \mapsto (x + y, xy)$ est bijective et calculer $f^{-1}(s, p)$ pour chaque $(s, p) \in V$.
5. En utilisant le changement de coordonnées f , déterminer toutes les fonctions g de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$\forall x < y, \quad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = 3(y - x)g.$$

-
1. Voir la figure 1.
 2. Soit la fonction $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y - x$. L'ensemble U est égal à $u^{-1}(]0, +\infty[)$. C'est l'image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}$ par une fonction continue. Donc c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit la fonction $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (s, p) \mapsto s^2 - 4p$. L'ensemble V est égal à $v^{-1}(]0, +\infty[)$. C'est l'image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}$ par une fonction continue. Donc c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
 3. Si $(x, y) \in U$, alors $x \neq y$, d'où $(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2 > 0$, donc $(x + y, xy) \in V$.

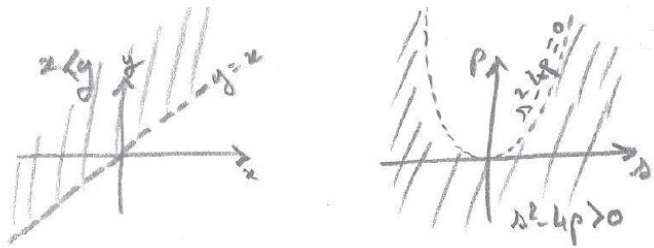


FIGURE 1 – LES PARTIES U ET V DU PLAN $\mathbb{R}^2$

4. Soient $(x, y) \in U$ et $(s, p) \in V$:

$$\begin{aligned}
 (*) \quad f(x, y) = (s, p) &\iff \begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases} \\
 &\iff x \text{ et } y \text{ sont les solutions de l'équation } X^2 - sX + p = 0 \\
 &\iff \{x, y\} = \left\{ \frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}, \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2} \right\} \quad \text{car } s^2 - 4p > 0 \\
 &\iff (**) \quad (x, y) = \left(\frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}, \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2} \right) \quad \text{car } x < y
 \end{aligned}$$

L'équation $(*)$ a une unique solution, donc f est bijective.

$$\text{D'après } (**), \quad f^{-1}(s, p) = \left(\frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}, \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2} \right).$$

5. Les dérivées partielles des fonctions $S : (x, y) \mapsto x + y$ et $P : (x, y) \mapsto xy$ sont

$$\frac{\partial S}{\partial x} : (x, y) \mapsto 1, \quad \frac{\partial S}{\partial y} : (x, y) \mapsto 1, \quad \frac{\partial P}{\partial x} : (x, y) \mapsto y \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} : (x, y) \mapsto x$$

et sont continues sur U , d'où les fonctions S et P sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U . La fonction $g = G \circ f$ vérifie $G(s, p) = g(x, y)$.

Et $G = g \circ f^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ car g et f^{-1} le sont.

D'où (règle de la chaîne) :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial s} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial s} + y \frac{\partial G}{\partial p} \\ \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial s} \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial s} + x \frac{\partial G}{\partial p} \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \forall (x, y) \in U, \quad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} &= 3(y - x)g \iff \frac{\partial G}{\partial p} = 3G \\
 &\iff \forall (s, p) \in V, \quad G(s, p) = C(s) \cdot e^{3p}, \text{ où } C \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \\
 &\iff \forall (x, y) \in U, \quad g(x, y) = C(x + y) \cdot e^{3xy}.
 \end{aligned}$$

Exercice 5 (Différentielle de l'inversion).

Soit $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. (a) Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 (b) En se rappelant la comatrice, montrer que l'application $f : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M = (m_{ij}) \mapsto M^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. (a) Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Montrer que :

$$(I_n + tE_{ij})^{-1} = I_n - tE_{ij} + o(t)$$

et en déduire $df(I_n) \cdot E_{ij}$.

- (b) Calculer $df(I_n) \cdot H$ pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déduire que

$$(I_n + H)^{-1} = I_n - H + o(H).$$

(c) Soit une matrice inversible A . Montrer que

$$(A + H)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + o(H)$$

et en déduire $df(A) \cdot H$.

3. (a) Soit une application $g : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ différentiable en A .

Montrer que l'application $G : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto M \cdot g(M)$ est aussi différentiable en A et calculer $dG(A) \cdot H$ pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Retrouver ainsi l'expression de $df(A) \cdot H$.

1. (a) L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque $\det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ de l'ensemble $\mathbb{R}^*$ par la fonction $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. Or la fonction $\det$ est continue et $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Donc $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) L'inverse d'une matrice $M \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit $\frac{1}{\det M} {}^t N$, où N est la comatrice de M . Chaque coefficient $(M^{-1})_{ij}$ de la matrice M^{-1} est donc une fraction rationnelle des coefficients M_{ij} de M car, au numérateur, $N_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ est un polynôme en les M_{ij} et, au dénominateur, $\det M$ est aussi un polynôme en les M_{ij} . Donc la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. (a) Si $i \neq j$, alors $(I_n + tE_{ij})^{-1} = I_n - tE_{ij}$.

Si $i = j$, alors $(I_n + tE_{ii}) = \text{diag}(1, \dots, 1, 1+t, 1, \dots, 1)$, d'où $(I_n + tE_{ii})^{-1} = \text{diag}(1, \dots, 1, \frac{1}{1+t}, 1, \dots, 1)$. Or $\frac{1}{1+t} = 1 - t + o(t)$. Donc $(I_n + tE_{ii})^{-1} = I_n - tE_{ii} + o(t)$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, d'où elle est différentiable, d'où

$$df(I_n) \cdot E_{ij} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(I_n + tE_{ij}) - f(I_n)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-tE_{ij} + o(t)}{t} = -E_{ij}.$$

(b) Toute matrice H s'écrit $H = \sum_{i,j} h_{ij} E_{ij}$. Or l'application $df(I_n)$ est linéaire, d'où

$$df(I_n) \cdot H = \sum_{i,j} h_{ij} df(I_n) \cdot E_{ij} = - \sum_{i,j} h_{ij} E_{ij} = -H,$$

donc $(I_n + H)^{-1} = f(I_n) + df(I_n) \cdot H + o(H) = I_n - H + o(H)$.

(c) $(A + H)^{-1} = [A \cdot (I_n + A^{-1}H)]^{-1} = (I_n + A^{-1}H)^{-1} \cdot A^{-1}$.

Or $(I_n + A^{-1}H)^{-1} = I_n - A^{-1}H + o(A^{-1}H)$ d'après la question précédente.

D'où $(A + H)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + o(A^{-1}H) \cdot A^{-1}$.

Or un $o(A^{-1}H) \cdot A^{-1}$ est aussi un $o(H)$ ([Pourquoi?](#)) D'où $(A + H)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + o(H)$. Donc $df(A) \cdot H = -A^{-1}HA^{-1}$.

3. (a) $G(A + H) = (A + H) \cdot g(A + H)$ et $g(A + H) = g(A) + dg(A) \cdot H + o(H)$, d'où

$$G(A + H) = A \cdot g(A) + H \cdot g(A) + A \cdot dg(A) \cdot H + H \cdot dg(A) \cdot H + (A + H) \cdot o(H).$$

Or $H \cdot dg(A) \cdot H + (A + H) \cdot o(H) = o(H)$. ([Pourquoi?](#)) Et l'application $H \mapsto H \cdot g(A) + A \cdot dg(A) \cdot H$ est linéaire. Donc G est différentiable en A et

$$dG(A) \cdot H = H \cdot g(A) + A \cdot dg(A) \cdot H.$$

(b) Si g est la fonction $f : A \mapsto A^{-1}$, alors G est la fonction constante $A \mapsto I_n$. D'où $dG(A) \cdot H = 0$, d'où $H \cdot f(A) + A \cdot df(A) \cdot H = 0$, donc $df(A) \cdot H = -A^{-1}HA^{-1}$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ est stochastique ([▷ TD n° 6, exo 4](#)) si

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ij} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1.$$

Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est une partie convexe, fermée et bornée de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

2. [▷ exo 7 de l'annexe C](#). Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte (i.e. fermée et bornée) mais pas connexe par arcs de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte et connexe par arcs de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

-
1. Pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la fonction $f_i : \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$, $A \mapsto \sum_{j=1}^n a_{ij}$ est continue (car linéaire sur l'ev $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie). L'ensemble $F_i = f^{-1}(\{1\})$ est donc un fermé de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ car c'est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ par la fonction continue f .

De même, pour chaque $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, la fonction $g_{ij} : \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$, $A \mapsto a_{ij}$ est continue, d'où $G_{ij} = g_{ij}^{-1}([0, +\infty[)$ est fermé.

Donc l'ensemble $(\cap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} F_i) \cap (\cap_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} G_{ij})$ des matrices stochastiques est un fermé de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ car c'est une intersection de fermés.

AUTRE MÉTHODE (par la caractérisation séquentielle d'un fermé) — Soit une suite de matrices stochastiques A_k qui converge vers une matrice A :

- pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n (A_k)_{ij} = 1$ et cette égalité passe à la limite, d'où $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$;
- pour chaque $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $(A_k)_{ij} \geq 0$ et cette inégalité large passe à la limite, d'où $a_{ij} \geq 0$.

D'où la matrice A est stochastique, donc l'ensemble des matrices stochastiques est un fermé de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

Pour montrer que l'ensemble des matrices $n \times n$ stochastiques est une partie bornée de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, on munit l'ev $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\| : A \mapsto \sum_{i,j} |a_{ij}|$ (ou de toute autre norme car toutes les normes sont équivalentes, cet ev étant de dimension finie). Pour toute matrice A stochastique, $\|A\| = \sum_{i=1}^n 1$ car $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$ et $|a_{ij}| = a_{ij}$ par hypothèses. D'où $\|A\| = n \leq n$ qui est un majorant.

2.

Exercice 7.

1. Dédurre de la concavité de la fonction $\ln$ que :

$$\forall (a, b, c) \in]0, +\infty[^3, \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

2. On note f la fonction définie sur $]0, +\infty[^2$ par : $f(x, y) = x + y + \frac{1}{xy}$. Préciser, pour chaque extremum local de la fonction f , si c'est un maximum ou un minimum et s'il est global.

Exercice 8. Soient une matrice carrée $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ symétrique définie positive, une matrice colonne $b \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et un réel $c \in \mathbb{R}$. On note E l'evn $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et on définit la fonction

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^T A x - 2b^T x + c.$$

1. Montrer que f est différentiable sur E et que, pour tout $x \in E$:

$$\forall h \in E, df(x) \cdot h = 2(Ax - b)^T h.$$

2. Etudier les extrema de la fonction f .

$$\begin{aligned} \text{Soit } h \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) : f(x+h) &= (x+h)^T A(x+h) - 2b^T(x+h) + c \\ &= f(x) + 2(Ax - b)^T h + h^T A h \text{ car } x^T A h = h^T A x \\ &= f(x) + \ell(h) + q(h) \end{aligned}$$

D'une part, $\ell : h \mapsto 2(Ax - b)^T h$ est linéaire.

D'autre part, $h^T A h = o(h)$. En effet, $|q(h)| \leq \|h\| \cdot \|Ah\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et $\|Ah\| \leq \|A\| \cdot \|h\|$. D'où $|h^T A h| \leq \|A\| \cdot \|h\|^2$.

D'où $\ell = df(x)$ et il existe un unique point critique x_0 de f : c'est $x_0 = A^{-1}b$ car la matrice A est inversible comme toute matrice symétrique définie positive.

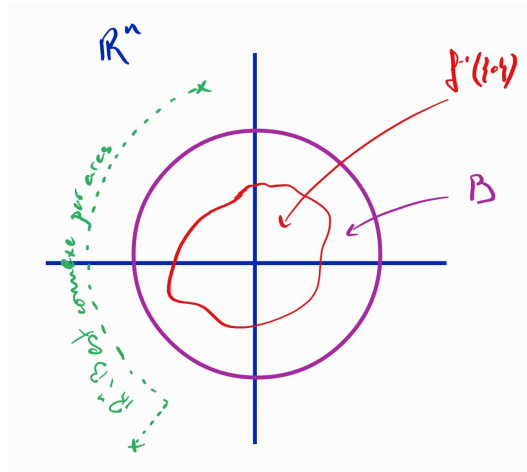
Si la fonction f possède un extremum, c'est en x_0 . Or, pour tout h , $f(x_0 + h) = f(x_0) + h^T A h \geq f(x_0)$. En effet, $h^T A h$ est positif car la matrice A est symétrique positive.

Donc f possède un unique extremum en $x_0 = A^{-1}b$. C'est un minimum et il est global.

Exercice 9. Soient un entier $n \geq 2$ et une fonction f continue de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f^{-1}(\{0\})$ est un compact non vide. Montrer que f admet un extremum global. Que dire si $n = 1$?

L'ensemble $f^{-1}(\{0\})$ est compact, donc fermé borné, il est donc inclus dans une boule fermée B centrée en 0.

L'application $f|_B$ possède un minimum global m et un maximum global M car elle est continue sur le compact B . De plus, f s'annule sur B , donc $m \leq 0$ et $M \geq 0$.



L'ensemble $A = \mathbb{R}^n \setminus B$ est connexe par arcs, la fonction f y est continue et ne s'y annule pas. Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle n'y change donc pas de signe. Si $f|_A > 0$, alors m est le minimum global de f . Si $f|_A < 0$, alors M est le maximum global de f .

Si $n = 1$, la propriété est fausse car la fonction identité $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ fournit un contre-exemple.

Exercice 10. Soient S la surface d'équation $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Montrer que la surface S est bornée.
2. Déterminer trois plans de symétrie de la surface S .
3. Montrer que, pour tout $(x, y, z) \in S$, $x + y + z \leq 1$. En déduire que la surface S est à l'intérieur d'un tétraèdre. Représenter graphiquement la surface S et ce tétraèdre.
4. Soit $A(a, b, c)$ un point de la surface S tel que ni a , ni b , ni c n'est nul. Quelle est l'équation du plan $P(a, b, c)$ tangent à la surface S au point A ?
5. On note x_0 , y_0 et z_0 les trois réels tels que le plan $P(a, b, c)$ coupe l'axe des x en $x = x_0$, l'axe des y en $y = y_0$ et l'axe des z en $z = z_0$. Calculer $x_0 + y_0 + z_0$ et montrer que cette somme ne dépend pas de (a, b, c) .

-
1. $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ et $\sqrt{z}$ sont positifs et $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ donc $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ et $\sqrt{z}$ sont dans $[0, 1]$ donc x , y et z sont dans $[0, 1]$ donc la surface est bornée.
 2. Les rôles de x , y sont les mêmes (on peut les échanger sans changer l'équation de S), d'où $(x, y, z) \in S \implies (y, x, z) \in S$ donc $x = y$ est l'équation d'un plan de symétrie de S . De même $x = z$ et $y = z$ sont les équations de deux autres plans de symétrie de S .
 3. Si (x, y, z) est un point de S , alors $x \leq \sqrt{x}$, $y \leq \sqrt{y}$ et $z \leq \sqrt{z}$ donc $x + y + z \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$. La surface S est incluse dans le tétraèdre de sommets $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. Voir la figure 2.

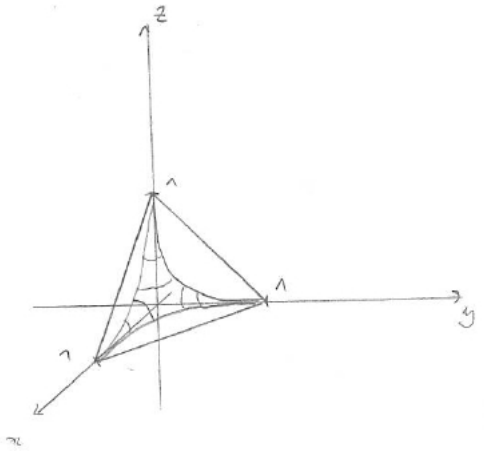


FIGURE 2 – LE TÉTRAÈDRE, LA SURFACE S & SES COURBES D'INTERSECTION AVEC LES 3 PLANS DE COORDONNÉES

4. L'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ est de classe C^1 et la surface S est la surface de niveau 1 de f , donc le plan $P(a, b, c)$ tangent à S au point $A(a, b, c)$ est le plan passant par A et orthogonal au gradient de f en A . Or $\nabla f(a, b, c) = \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}, \frac{1}{2\sqrt{b}}, \frac{1}{2\sqrt{c}} \right)$, d'où

$$M(x, y, z) \in P(a, b, c) \iff \vec{AM} \perp \nabla f(A) \iff \frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a) + \frac{1}{2\sqrt{b}}(y-b) + \frac{1}{2\sqrt{c}}(z-c) = 0 \iff \frac{1}{\sqrt{a}}x + \frac{1}{\sqrt{b}}y + \frac{1}{\sqrt{c}}z = 1.$$

5. Le plan $P(a, b, c)$ coupe l'axe des x en le point $(x_0, 0, 0)$ tel que $\frac{1}{\sqrt{a}}x_0 = 1$, c'est-à-dire $x_0 = \sqrt{a}$. De même, $y_0 = \sqrt{b}$ et $z_0 = \sqrt{c}$, d'où $x_0 + y_0 + z_0 = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$. Donc $x_0 + y_0 + z_0$ ne dépend pas de (a, b, c) .