

## F E U I L L E D E T . D . N° 1 5

*Calcul différentiel*

**Exercice 1** (Dériver suivant un vecteur). Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés de dimensions finies. Soient un ouvert  $U \subset E$ , un point  $a \in U$  et un vecteur  $v \in E$ . On dit qu'une fonction  $f : U \rightarrow F$  est dérivable en le point  $a$  suivant le vecteur  $v$  si le vecteur

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

existe. On note alors ce vecteur  $D_v f(a)$  et on l'appelle la dérivée de  $f$  en  $a$  suivant  $v$ .

1. Montrer que : si  $f$  est dérivable en  $a$  suivant tout vecteur  $v$ , alors  $f$  admet des dérivées partielles en  $a$ .
2. Soit  $g(x, y) = \frac{x^2 \cdot y}{x^4 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $g(0, 0) = 0$ .
  - (a) Montrer que la fonction  $g$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .
  - (b) Montrer que  $g$  est dérivable en  $(0, 0)$  suivant tout vecteur  $(x, y)$ .
3. Montrer que : si  $f$  est différentiable en  $a$ , alors  $f$  est dérivable en  $a$  suivant tout vecteur  $v$  et

$$D_v f(a) = df(a) \cdot v.$$

La réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 2.** Soient  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie,  $U$  un ouvert de  $E$ ,  $a$  un élément de  $U$  et deux fonctions

$$\lambda : E \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f : E \rightarrow E.$$

différentiables en  $a$ . Montrer que la fonction

$$\lambda f : E \rightarrow E, x \mapsto \lambda(x)f(x)$$

est différentiable en  $a$  et que

$$d(\lambda f)(a) = f(a)d\lambda(a) + \lambda(a)df(a).$$

**Exercice 3** (Le gradient en coordonnées cylindriques). La fonction

$$M : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \varphi, z) \mapsto (x, y, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$$

change les coordonnées cylindriques  $(r, \varphi, z)$  en coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ .

1. Calculer la matrice jacobienne  $J_f(r, \varphi, z)$ .
2. Représenter sur un dessin les coordonnées cylindriques  $(r, \varphi, z)$  d'un point  $M$  et les trois vecteurs colonnes de la jacobienne.
3. Exprimer le gradient en coordonnées cylindriques.

**Exercice 4.** Soit  $U$  et  $V$  les parties de  $\mathbb{R}^2$  définies par

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\} \quad \text{et} \quad V = \{(s, p) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 - 4p > 0\}.$$

1. Représenter sur deux figures les ensembles  $U$  et  $V$ .
2. Montrer que  $U$  et  $V$  sont des ouverts de l'espace vectoriel normé  $\mathbb{R}^2$ .
3. Montrer que : si  $(x, y) \in U$ , alors  $(x + y, xy) \in V$ .
4. Montrer que la fonction  $f : U \rightarrow V$ ,  $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$  est bijective et calculer  $f^{-1}(s, p)$  pour chaque  $(s, p) \in V$ .
5. En utilisant le changement de coordonnées  $f$ , déterminer toutes les fonctions  $g$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que :

$$\forall x < y, \quad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = 3(y - x)g.$$

**Exercice 5** (Différentielle de l'inversion).

Soit  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices inversibles de l'espace vectoriel normé  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. (a) Montrer que  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  
(b) En se rappelant la comatrice, montrer que l'application  $f : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $M = (m_{ij}) \mapsto M^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .
2. (a) Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Montrer que :

$$(I_n + tE_{ij})^{-1} = I_n - tE_{ij} + o(t)$$

et en déduire  $df(I_n) \cdot E_{ij}$ .

- (b) Calculer  $df(I_n) \cdot H$  pour tout  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et en déduire que

$$(I_n + H)^{-1} = I_n - H + o(H).$$

- (c) Soit une matrice inversible  $A$ . Montrer que

$$(A + H)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + o(H)$$

et en déduire  $df(A) \cdot H$ .

3. (a) Soit une application  $g : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  différentiable en  $A$ .  
Montrer que l'application  $G : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $M \mapsto M \cdot g(M)$  est aussi différentiable en  $A$  et calculer  $dG(A) \cdot H$  pour tout  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  
(b) Retrouver ainsi l'expression de  $df(A) \cdot H$ .

**Exercice 6.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. On dit qu'une matrice  $A = (a_{ij})$  de  $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$  est stochastique ([▷ TD n° 6, exo 4](#)) si

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_{ij} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1.$$

Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est une partie convexe, fermée et bornée de  $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ .

2. [▷ exo 7 de l'annexe C](#). Montrer que  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est une partie compacte (i.e. fermée et bornée) mais pas connexe par arcs de  $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$  est une partie compacte et connexe par arcs de  $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ .

**Exercice 7.**

1. Déduire de la concavité de la fonction  $\ln$  que :

$$\forall (a, b, c) \in ]0, +\infty[^3, \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

2. On note  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[^2$  par :  $f(x, y) = x + y + \frac{1}{xy}$ . Préciser, pour chaque extremum local de la fonction  $f$ , si c'est un maximum ou un minimum et s'il est global.

**Exercice 8.** Soient une matrice carrée  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  symétrique définie positive, une matrice colonne  $b \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$  et un réel  $c \in \mathbb{R}$ . On note  $E$  l'evn  $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$  et on définit la fonction

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^T A x - 2b^T x + c.$$

1. Montrer que  $f$  est différentiable sur  $E$  et que, pour tout  $x \in E$  :

$$\forall h \in E, df(x) \cdot h = 2(Ax - b)^T h.$$

2. Etudier les extrema de la fonction  $f$ .

**Exercice 9.** Soient un entier  $n \geq 2$  et une fonction  $f$  continue de  $\mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}$  telle que  $f^{-1}(\{0\})$  est un compact non vide. Montrer que  $f$  admet un extremum global. Que dire si  $n = 1$  ?

**Exercice 10.** Soient  $S$  la surface d'équation  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$  dans le repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1. Montrer que la surface  $S$  est bornée.
2. Déterminer trois plans de symétrie de la surface  $S$ .
3. Montrer que, pour tout  $(x, y, z) \in S$ ,  $x + y + z \leq 1$ . En déduire que la surface  $S$  est à l'intérieur d'un tétraèdre. Représenter graphiquement la surface  $S$  et ce tétraèdre.
4. Soit  $A(a, b, c)$  un point de la surface  $S$  tel que ni  $a$ , ni  $b$ , ni  $c$  n'est nul. Quelle est l'équation du plan  $P(a, b, c)$  tangent à la surface  $S$  au point  $A$  ?
5. On note  $x_0$ ,  $y_0$  et  $z_0$  les trois réels tels que le plan  $P(a, b, c)$  coupe l'axe des  $x$  en  $x = x_0$ , l'axe des  $y$  en  $y = y_0$  et l'axe des  $z$  en  $z = z_0$ . Calculer  $x_0 + y_0 + z_0$  et montrer que cette somme ne dépend pas de  $(a, b, c)$ .