

Révisions - Thème 4 - Exercice 12

le quotient de Rayleigh

Merci à
Noémie
Rialland

$$n \in \mathbb{N}^*, A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), U = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$$

$$\forall X \in U, f(X) = \frac{X^T A X}{X^T X} = \frac{\langle X, A X \rangle}{\|X\|^2}$$

1. Méthode 1:

$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc d'après le théorème spectral, il existe $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A

Soit $X \in U, \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $X = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$$\|X\|^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \quad \text{et} \quad \langle X, A X \rangle = X^T \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i$$

$$\text{d'où} \quad \frac{X^T A X}{X^T X} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \leq \frac{\lambda_{\max} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} = \lambda_{\max}$$

ou $\exists i \in [1, n]$ tq $\lambda_i = \lambda_{\min}$ ($\lambda_i = \lambda_{\max}$) r de même

$$\text{alors } \alpha_j = \delta_{ij} \quad \text{i.e. } X = v_i \quad \Rightarrow \quad \frac{X^T A X}{X^T X} = \lambda_{\min}$$

Donc f est bornée et atteint ses bornes

Méthode 2:

$$\forall X \in U, f(X) = \frac{X^T A X}{X^T X} = \frac{X^T A X}{\|X\|^2} = Y^T A Y \quad \text{où } Y = \frac{X}{\|X\|}$$

D'où $f(U) = f(S)$ où $S = \{X \in U, \|X\| = 1\}$ la sphère unité

Or la fonction f est continue car ∇

et S est un fermé borné de U d'où $f(S)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$

B - c'est un quotient de fonctions continues : toute norme est continue et $X \mapsto (X, X)$ et $(X, Y) \mapsto X^T A Y$ sont C^0
donc $X \mapsto X^T A X$ aussi linéaire bilinéaire en U de dim finie
De plus $\|\cdot\|^2$ ne s'annule pas car $0 \notin U$

$$\text{•} \quad \text{Mtg } f(x+h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)$$

$$f(X+H) = \frac{(X+H)^T A (X+H)}{(X+H)^T (X+H)} = \frac{X^T A X + H^T A X + X^T A H + H^T A H}{X^T X + X^T H + H^T X + H^T H}$$

$H \mapsto H^T A X$ $H \mapsto X^T A H$ $H \mapsto H^T A H$ sont des fonctions linéaires donc continues

$$\text{d'où } f(X+H) \xrightarrow{H \rightarrow 0} f(X)$$

2. On veut montrer que

$$f(X+H) = f(X) + l(H) + o(H) \quad \text{où } l \text{ est une application linéaire}$$

$$f(X+H) = \frac{X^T A X + H^T A X + X^T A H + H^T A H}{\|X\|^2 \left(1 + \frac{H^T X + X^T H + H^T H}{\|X\|^2}\right)}$$

DL:

$$\frac{1}{1+u} = 1 - \frac{H^T X + X^T H + H^T H}{\|X\|^2} + \dots$$

$$f(X+H) = f(X) + \frac{H^T A X + X^T A H}{\|X\|^2} - \frac{X^T A X (H^T X + X^T H)}{\|X\|^4} + \dots$$

$$H^T A X = X^T A H$$

car c'est un nombre donc sa transposée est lui-même

$$= f(X) + \frac{2 X^T A H}{\|X\|^2} - \frac{(X^T A X) 2 X^T H}{\|X\|^4} + \dots$$

$$= f(X) + 2 \frac{\|X\|^2 \langle A X, H \rangle - \langle X, A X \rangle \langle X, H \rangle}{\|X\|^4} + \dots$$

Or d'ap le th. de représentation de Riesz

$$l(H) = \langle \nabla f(X), H \rangle$$

$$\text{donc } \nabla f(X) = 2 \frac{\|X\|^2 A X - \langle X, A X \rangle X}{\|X\|^4}$$

Il faut enfin vérifier que ... = $o(H)$

$$0 \leq |H^T A H| = |\langle H, A H \rangle| \leq \|H\| \times \|A H\| \leq \|H\| \times \underbrace{\|A\| \times \|H\|}_{\xrightarrow{H \rightarrow 0} 0} \leq o(H)$$

Autre rédaction:

$$0 \leq \frac{|H^T A H|}{\|H\|} \leq \|A\| \times \|H\| \xrightarrow{H \rightarrow 0} 0$$

il faudrait faire pareil pour le reste de ...

3. X est un point critique de f

$$\text{ssi } \nabla f(X) = 0 \quad \text{ssi } \|X\|^2 AX - \langle X, AX \rangle X = 0$$

• Si X est un point critique de f alors

$$AX = \frac{\langle X, AX \rangle}{\|X\|^2} X \quad \text{or } X \neq 0 \quad \text{donc } X \text{ est un } \vec{v}_p \text{ de } A$$

• Réciproquement, si $X \neq 0$ et que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $AX = \lambda X$

$$\text{alors } \|X\|^2 \lambda X - \langle X, \lambda X \rangle X = \|X\|^2 \lambda X - \lambda \|X\|^2 X = 0$$