Corrigé du Kdo du 28/03/2025

Calcul différentiel

Exercice 1. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (xe^y, y - \frac{x^2}{2})$.

1) Montrer que la fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto xe^{x^2/2}$ est une bijection.

2) La fonction ϕ^{-1} est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

3) Montrer que la fonction f est une bijection et, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, exprimer $f^{-1}(u,v)$ à l'aide de la fonction ϕ^{-1}.

4) Déterminer toutes les fonctions g de classe C^1 telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial x} + x\frac{\partial g}{\partial y} = (1+x^2)e^y g$$

---

1) La fonction ϕ est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi'(x) = (1+x^2)e^{x^2/2} > 0$. D'où ϕ est strictement croissante, donc ϕ est injective. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et la fonction ϕ est continue, d'où ϕ est surjective d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

2) La dérivée de ϕ ne s'annule pas, donc ϕ^{-1} est dérivable sur tout $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\phi^{-1})'(x) = \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(x))}$$

Les fonctions ϕ^{-1} et ϕ' sont continues donc $(\phi^{-1})'$ est aussi continue. On conclut que ϕ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$.

3) Soient $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} u = xe^y \\ v = y - \frac{x^2}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} ue^{-v} = xe^y e^{-y+\frac{x^2}{2}} = xe^{\frac{x^2}{2}} \\ v = y - \frac{x^2}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \phi^{-1}(ue^{-v}) \\ y = v + \frac{[\phi^{-1}(ue^{-v})]^2}{2} \end{cases}$$

Donc la fonction f est bijective et $f^{-1}(u,v) = \left(\phi^{-1}(ue^{-v}), v + \frac{[\phi^{-1}(ue^{-v})]^2}{2}\right)$.

4) La fonction $G = g \circ f^{-1}$ vérifie $G(u,v) = g(x,y)$ et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial G}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = e^y\dfrac{\partial G}{\partial s} - x\dfrac{\partial G}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{\partial G}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial G}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = xe^y\dfrac{\partial G}{\partial u} + \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{cases}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} + x\frac{\partial g}{\partial y} = (1+x^2)e^y g &\iff \frac{\partial G}{\partial u} = G, \text{ car } (1+x^2)e^y \neq 0 \\ &\iff G(u,v) = C(v)\cdot \mathrm{e}^u, \text{ où } C \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \\ &\iff g(x,y) = C\left(y - \frac{x^2}{2}\right)\cdot \mathrm{e}^{xe^y}. \end{aligned}$$