Équations différentielles

1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$;
2. $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$ sur $]-1, +\infty[$;
3. $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$ sur $]0, +\infty[$;
4. $y' - 2xy = -(2x-1)e^x$ sur $\mathbb{R}$;
5. $y' - \dfrac{2}{t}y = t^2$ sur $]0, +\infty[$;

Solution **1.** .

1. *On commence par résoudre l'équation homogène $y'+y=0$ dont la solution générale est $y(x) = \lambda e^{-x}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = \lambda(x)e^{-x}$. La méthode de variation de la constante donne :*
$$\lambda'(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x} \implies \lambda'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$
Une solution particulière est donc donné par $y(x) = \ln(1+e^x)e^{-x}$. Finalement, la solution générale de l'équation avec second membre est donnée par
$$x \mapsto \ln(1+e^x)e^{-x} + \lambda e^{-x}.$$

2. *On commence par résoudre l'équation homogène $(1+x)y' + y = 0$, dont la solution générale est donnée par $y(x) = \frac{\lambda}{1+x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante, en posant $y(x) = \frac{\lambda(x)}{1+x}$. On obtient*
$$\lambda'(x) = 1 + \ln(1+x).$$
Une primitive est donnée par $\lambda(x) = (1+x)\ln(1+x)$, et la solution générale de l'équation avec second membre est donc donnée par
$$x \mapsto \frac{\lambda}{1+x} + \ln(1+x).$$

3. *On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' - \frac{y}{x} = 0$. On remarque que $x \mapsto x$ est une solution. L'ensemble des solutions de l'équation sans second membre est donc les fonctions $x \mapsto Cx$, $C \in \mathbb{R}$.*
On cherche ensuite une solution particulière sous la forme $y(x) = \lambda(x)x$. Reportant dans l'équation différentielle, on trouve l'équation $\lambda'(x) = x$, ce qui donne $\lambda(x) = \frac{x^2}{2} + C$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc donné par les fonctions
$$x \mapsto Cx + \frac{x^3}{2}.$$

4. *On commence par résoudre l'équation homogène $y' - 2xy = 0$. La solution générale de l'équation homogène est $t \mapsto \lambda e^{x^2}$.*
On cherche ensuite une solution particulière de l'équation en utilisant la méthode de variation de

la constante. On pose donc $y(x) = \lambda(x)e^{x^2}$ et introduisant y dans l'équation avec second membre, on trouve

$$\lambda'(x)e^{x^2} = (-2x+1)e^x \iff \lambda'(x) = (-2x+1)e^{-x^2+x}.$$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est donc donnée par

$$x \mapsto e^{-x^2+x}e^{x^2} = e^x.$$

Finalement, les solutions de l'équation sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{x^2} + e^x$.

5. *On commence par résoudre l'équation homogène $y' - \frac{2}{t}y = 0$. On trouve que les solutions sont les fonctions de la forme $y(t) = \lambda t^2$. On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante en posant $y(t) = \lambda(t)t^2$. L'équation devient :*

$$t^2 = y'(t) - \frac{2}{t}y(t) = \lambda'(t)t^2.$$

Dès lors, $\lambda'(t) = 1$ soit $\lambda(t) = t + C$. Finalement, les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation de départ sont les fonctions

$$t \mapsto t^3 + Ct^2.$$

<u>Exercice 2.</u> Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

1. $(x\ln x)y' - y = -\frac{1+\ln x}{x}$ sur $]1, +\infty[$, puis sur $]0, +\infty[$;
2. $xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$;
3. $y'\cos^2 x - y = e^{\tan x}$ sur $\mathbb{R}$;

<u>Solution</u> **2.** .

1. *Sur $]1, +\infty[$, la fonction $x \mapsto x\ln x$ ne s'annule pas, donc l'ensemble de ces solutions est donc une droite affine.*
Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x\ln x}$ est $\ln(\ln(x))$, on en déduit $y(x) = C\ln(x)$.
On cherche maintenant une solution particulière en utilisant la méthode de variation de la constante : on cherche donc une solution sous la forme

$$f(x) = C(x)\ln(x).$$

En dérivant, et en intégrant dans l'équation on obtient :

$$(x\ln(x))\ln(x)C'(x) = -(1+\ln(x))/x$$

soit

$$C'(x) = -\frac{1+\ln(x)}{x^2(\ln(x))^2}.$$

Ceci est de la forme $-u'/u^2$, avec $u(x) = x\ln(x)$. Une solution particulière est donnée par $C(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$, soit $f(x) = \frac{1}{x}$. Finalement, on trouve que les fonctions solutions de l'équation différentielle sur $]1, +\infty[$ sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{x} + C\ln(x),\ C \in \mathbb{R}.$$

Si f est donc une solution sur $]0, +\infty[$, alors d'après les calculs précédents, il existe deux constantes C et D telle que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + C\ln x & \text{si } x>1 \\ \frac{1}{x} + D\ln x & \text{si } x \in]0,1[. \end{cases}$$

D'une part, puisque $\ln(1) = 0$, on remarque que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1.$$

La fonction est donc continue en 1, quelles que soient les valeurs de C et D.
De plus, on sait que $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{C}{x}$ si $x > 1$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{D}{x}$ sinon. On a donc

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = -1 + C \text{ tandis que } \lim_{x\to 1^-} f'(x) = -1 + D.$$

Les limites à droite et à gauche de f' coincident si et seulement si $C = D$. Autrement dit, f' est dérivable en 1 si et seulement si $C = D$.
Ainsi, les solutions de l'équation sur $]0, +\infty[$ doivent s'écrire

$$x \mapsto \frac{1}{x} + C\ln(x),\ C \in \mathbb{R}.$$

Et on vérfie que ce sont bien des solutions de l'équation.

2. *On résout l'équation différentielle sur $I_1 =]0, +\infty[$ et sur $I_2 =]-\infty, 0[$, intervalles où la fonction devant y' ne s'annule pas.*
L'ensemble des solutions sur I_j de l'équation $xy' + 2y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto C_j/x^2$.
On pose donc $y(x) = \lambda(x)/x^2$. y est solution de l'équation différentielle si et seulement si

$$\lambda'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

En intégrant, une solution particulière est donnée par

$$\lambda(x) = \frac{x - \arctan x}{x^2}.$$

Les solutions sur I_j de l'équation différentielle sont donc les fonctions

$$x \mapsto \frac{x - \arctan x + C_j}{x^2}.$$

Soit maintenant z une solution sur $\mathbb{R}$. Il existe des constantes C_1 et C_2 telle que $\forall x \in I_j$, $z(x) = \dfrac{x - \arctan x + C_j}{x^2}$. Par continuité en 0, $C_j = 0$.
Réciproquement, si $z(x) = \frac{x - \arctan x}{x^2}$ pour $z \neq 0$, alors on effectue un dl et on trouve

$$z(x) = \frac{x}{3} + o(x).$$

Il suit que z, prolongée par $z(0) = 0$, est dérivable en 0 avec $z'(0) = 1/3$. z est donc l'unique solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

3. *Sur un intervalle du type $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, avec $k \in \mathbb{Z}$, , la solution générale de l'équation homogène est de la forme $x \mapsto \lambda e^{\tan x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.*
La recherche d'une solution particulière par la méthode de variation de la constante amène à

$$\lambda'(x)\cos^2(x)e^{\tan x} = e^{\tan x}$$

ce qui donne comme solution particulière $x \mapsto e^{\tan x}(\tan x + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Lorsque x tend vers $\pi/2 + k\pi$ (par valeurs inférieures), cette fonction tend vers $+\infty$: il n'y a donc pas de recollement possible.

Exercice 3. * Donner une équation différentielle dont les solutions sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{C + x}{1 + x^2},\ C \in \mathbb{R}.$$

Solution **3.** . *On va procéder par analyse/synthèse. Pour cela, on écrit qu'une solution f s'écrit*

$$f(x) = \frac{C + x}{1 + x^2} \iff C = (1 + x^2)f(x) - x.$$

Le but étant d'éliminer C, on dérive la relation précédente, et on trouve

$$0 = (1+x^2)f'(x) + 2xf(x) - 1.$$

C'est l'équation différentielle recherchée ! En effet, réciproquement, si l'on considère l'équation différentielle

$$(1+x^2)y'(x) + 2xy(x) - 1 = 0,$$

on prouve facilement que ses solutions sont les fonctions $x \mapsto \frac{C+x}{1+x^2}$.

<u>Exercice 4.</u> ** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) + f'(x)\big) = 0.$$

Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

<u>Solution</u> **4.** *. On pose $g = f + f'$. Alors f est solution de l'équation différentielle $f + f' = g$. On résout cette équation. L'équation homogène est $f' + f = 0$ dont la solution générale est donnée par λe^{-x}. On résout l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante : en posant $f(x) = \lambda(x)e^{-x}$, on trouve*

$$\lambda'(x)e^{-x} = g(x),$$

et une solution particulière est donnée par

$$f_0(x) = e^{-x}\int_0^x g(t)e^t dt.$$

Finalement, toute fonction f vérifiant $f + f' = g$ s'écrit

$$f(x) = \lambda e^{-x} + e^{-x}\int_0^x g(t)e^t dt.$$

Pour montrer que f tend vers 0 en $+\infty$, il suffit de prouver que $h(x) = e^{-x}\int_0^x g(t)e^t dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Pour cela, on va utiliser que g tend vers 0 en $+\infty$.

Méthode 1 *Soit $\varepsilon > 0$. On coupe l'intégrale en 2 : Il existe $A > 0$ tel que, pour $t > A$, on a $|g(t)| \leq \varepsilon$. Soit $M = \int_0^A |g(t)e^t| dt$ et soit $B \geq A$ tel que, pour $x \geq B$, on a $e^{-x}M \leq \varepsilon$. Alors, pour tout $x \geq b$, il vient*

$$\begin{aligned}
\left|e^{-x}\int_0^x g(t)e^t dt\right| &\leq e^{-x}\int_0^A |g(t)e^t| dt + e^{-x}\int_A^x |g(t)|e^t dt \\
&\leq e^{-x}M + e^{-x}\int_A^x \varepsilon e^t dt \\
&\leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

On a bien prouvé que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

Méthode 2 *On fait un changement de variables affines $u = x - t$ dans la définition de h :*

$$h(x) = \int_0^{+\infty} g(x-u)\, e^{-u}\, dt$$

Par hypothèse, la fonction $g \circ \tan : [0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ se prolonge par contnuité en 0. On en déduit que g est bornée et le thérème de convergence dominée avec comme hypothèse de domination : $|g(x-u)\, e^{-u}| \leq e^{-u}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$, nous dit que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

<u>Exercice 5.</u> ** Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continues vérifiant, pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{2}\int_0^x f^2(t)dt = \frac{1}{x}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2.$$

<u>Solution</u> **5.** . *Posons* $y(x) = \int_0^x f(t)dt$, *qui est dérivable sur* $[0, +\infty[$. *Alors, dérivant l'équation, on a*

$$\frac{1}{2}f^2(x) = -\frac{1}{x^2}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 + \frac{2}{x}\left(\int_0^x f(t)dt\right)f(x)$$

soit

$$\frac{1}{2}y'^2 = -\frac{1}{x^2}y^2 + \frac{2}{x}yy' \iff (y' - \frac{2}{x}y)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0 \iff (y' - \frac{2}{x}y + y\sqrt{2})(y' - \frac{2}{x}y - y\sqrt{2}) = 0.$$

On pose $g(x) = y' - \frac{2}{x}y + y\sqrt{2}$ *et* $h(x) = y' - \frac{2}{x}y - y\sqrt{2}$ *qui sont deux fonctions continues sur* $\mathbb{R}_+$ *d'après les hypothèses.*
Soit φ *une solution, alors soit pour tout* $x > 0$, $f(x) = 0$ *et* $\varphi(x) = \lambda x^{2-\sqrt{2}}$, *soit il existe* x_0, *tel que* $f(x_0) \neq 0$ *et dans ce cas il existe un intervalle* I, *voisinage de* x_0, *tel que* f *ne s'annule pas sur* I.
Mais alors g *est nulle sur* I *: on en déduit que sur* $\forall x \in I$, $\varphi(x) = \mu x^{2+\sqrt{2}}$.
Notons que la seule valeur de x *pour laquelle* $f(x) = g(x) = 0$ *est* 0. *On en déduit que l'on peut supposer* $I = \mathbb{R}_+$.
Revenant à $f = y'$, *on trouve sur* I *que*

$$f(x) = \lambda x^{1\pm\sqrt{2}}.$$

<u>Exercice 6.</u> ♡* Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, bornée et intégrable. Démontrer que toutes les solutions de l'équation différentielle $y'(t) - a(t)y(t) = 0$ sont bornées.

<u>Solution</u> **6.** . *Les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme* $y(t) = C\exp\big(A(t)\big)$ *avec* $A(t) = \int_0^t a(t)dt$. *Or, pour tout* $t \in \mathbb{R}$,

$$|A(t)| \leq \left|\int_0^t |a(u)|du\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |a(u)|du.$$

Ainsi, y *est bornée par* $C\exp\left(\int_{\mathbb{R}} |a(u)|du\right)$.

<u>Exercice 7.</u> *** Soient $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodiques de période 1. À quelle(s) condition(s) l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$ admet-elle des solutions 1-périodiques. Les déterminer.

<u>Solution</u> **7.** . *La solution générale de l'équation s'écrit*

$$y(x) = \left(\alpha + \int_0^x b(t)e^{-A(t)}dt\right)e^{A(x)}$$

où $A(x) = \int_0^x a(t)dt$. *Notons que*

$$A(x+1) = A(x) + \int_x^{x+1} a(t)dt = A(x) + \int_0^1 a(t)dt,$$

et posons $\lambda = \int_0^1 a(t)dt$. *On a ainsi :*

$$\begin{aligned} y(x+1) &= \left(\alpha + \int_0^1 b(t)e^{-A(t)}dt + \int_1^{x+1} b(t)e^{-A(t)}dt\right)e^{A(x+1)} \\ &= \left(\alpha + \int_0^1 b(t)e^{-A(t)}dt + \int_0^x b(t)e^{-\lambda - A(t)}dt\right)e^{A(x)+\lambda} \\ &= y(x) + \big(\alpha(e^\lambda - 1) + \mu e^\lambda\big)e^{A(x)} \end{aligned}$$

où on a posé $\mu = \int_0^1 b(t)e^{-A(t)}dt$. *Autrement dit,* f *est* $1-$*périodique si et seulement*

$$\alpha(e^\lambda - 1) + \mu e^\lambda = 0.$$

Si $\lambda \neq 0$, l'équation admet une unique solution $1-$périodique, donnée par

$$\alpha = \frac{\mu e^{\lambda}}{1 - e^{\lambda}}.$$

Si $\lambda = 0$ et $\mu = 0$, alors toute solution est 1-périodique.
Si $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$, alors il n'y a aucune solution 1-périodique.

Exercice 8. ♡* Soit $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec a impaire et b paire. Montrer que l'équation différentielle

$$(E)\ y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

admet une unique solution impaire.

Solution **8.** . *Il y a deux clés pour résoudre cet exercice :*

- *Toute fonction impaire vaut 0 en 0 ;*
- *L'équation différentielle (E) admet une unique solution y_0 vérifiant $y_0(0) = 0$.*

Ceci montre déjà l'unicité : s'il y a une fonction y impaire solution de (E), elle vérifie $y(0) = 0$ et doit donc être égale à y_0. Réciproquement, on doit prouver que y_0 est impaire. On va poser $z(t) = -y_0(-t)$. z est solution de (E). En effet,

$$z'(t) + a(t)z(t) = y_0'(-t) - a(t)y_0(-t) = y_0'(t) + a(-t)y_0(t) = b(-t) = b(t),$$

car y_0 est solution de (E), a est impaire et b est paire. z est donc solution de (E), et satisfait de plus $z(0) = 0$. Ainsi, par unicité au problème de Cauchy, z est égale à y_0, et donc y_0 est paire.
On pouvait aussi prouver que y_0 est impaire, en cherchant à résoudre l'équation différentielle par la méthode usuelle (solution de l'équation homogène à l'aide de l'exponentielle et d'une primitive de a, puis méthode de variation de la constante).

Exercice 9. ♡** On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Démontrer l'équivalence de

1. A est antisymétrique ;
2. Toutes les solutions de l'équation $X' = AX$ sont de norme constante.

Solution **9.** . *On va noter M^T la transposée d'une matrice. La norme de X (au carré) est donnée par $Y(t) = X(t)^T X(t)$. On cherche une condition sur A pour que, pour toute solution X, la dérivée de Y est constante. Or,*

$$Y'(t) = X'(t)^T X(t) + X(t)^T X'(t) = X(t)^T (A^T + A) X(t).$$

Ainsi, si A est antisymétrique, on a bien $Y'(t) = 0$ et les solutions sont de norme constante.
Réciproquement, si les solutions sont toutes de norme constante, on sait que, quelque soit le choix de $X(0) \in \mathbb{R}$, on a

$$X(0)^T (A^T + A) X(0) = 0.$$

Par suite, si $X(0)$ est un vecteur propre de l'endomorphisme symétrique $A^T + A$, associé à la valeur propre λ, on a

$$\lambda \|X(0)\|^2 = 0,$$

et donc $\lambda = 0$. Donc la seule valeur propre de $A^T + A$ est 0. Cet endomorphisme étant symétrique, donc diagonalisable, on en déduit qu'il est nul et que $A^T = -A$, c'est-à-dire que A est anti-symétrique.

2 Système d'équations différentielles

Exercice 10. ♡* Résoudre les systèmes différentiels suivants :

1. $\begin{cases} x' &= x + 2y - z \\ y' &= 2x + 4y - 2z \\ z' &= -x - 2y + z \end{cases}$

2. $Y' = AY$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

<u>*Solution* **10.**</u> **.**

1. *Introduisons la matrice*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$
de sorte que le système s'écrit $X' = AX$ *avec* $X(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$. *Le polynôme caractéristique de* A *est* $X^2(X-6)$. 0 *est valeur propre double, mais* A *est de rang 1 et donc* $\ker(A)$ *est de dimension 2. Une base de* $\ker(A)$ *est donnée par les vecteurs* $u_1 = (1,0,1)$ *et* $u_2 = (2,-1,0)$. *D'autre part, une base de* $\ker(A-6I)$ *est donné par* $u_3 = (1,2,-1)$. *Les solutions sont donc données par les triplets s'écrivant*
$$X(t) = \lambda u_1 + \mu u_2 + \gamma e^{6t} u_3.$$

2. *Les valeurs propres de la matrice sont* 1, i *et* $-i$. *Un vecteur propre associé à 1 est* $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$.
Un vecteur propre associé à i *est* $V_i = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. *Bien entendu, la matrice étant réelle, un vecteur propre associé à* $-i$ *est* $\overline{V_i}$. *Pour obtenir des solutions réelles, on peut considérer (toujours parce que la matrice* A *est réelle)* $\Re e(V_i e^{it})$ *et* $\Im m(V_i e^{it})$. *On trouve alors les solutions (indépendantes)*
$$\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 2\cos t \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2\sin t \end{pmatrix}.$$
La solution générale du système dans $\mathbb{R}$ *est donc*
$$\begin{pmatrix} \lambda e^t - \mu \sin t + \nu \cos t \\ -3\lambda e^t + \mu \cos t + \nu \sin t \\ -4\lambda e^t + 2\mu \cos t + 2\nu \sin t \end{pmatrix}.$$

<u>**Exercice 11.**</u> * Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A)$. En déduire la solution générale du sytème $X' = AX$.

<u>*Solution* **11.**</u> **.** *Introduisons*
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Il est facile de remarquer que
$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
et $B^n = 0$ *pour* $n \geq 3$. *De plus,* $A = (aI_3 + bB + cB^2)$. *Puisque* I_3, B *et* B^2 *commutent, on a*
$$\exp(A) = \exp(a)\exp(bB)\exp(cB^2).$$

Or, utilisant que $B^n = 0$ pour $n \geq 3$, on trouve

$$\begin{aligned}\exp(bB) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(bB)^n}{n!} \\ &= I_3 + bB + \frac{b^2B^2}{2},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\exp(cB^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(cB^2)^n}{n!} \\ &= I_3 + cB^2.\end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned}\exp(A) &= e^a \left(I_3 + bB + \frac{b^2B^2}{2}\right)\left(I_3 + cB^2\right) \\ &= e^a \left(I_3 + bB + \left(\frac{b^2}{2} + c\right) B^2\right)\end{aligned}$$

soit

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^a & be^a & \left(\frac{b^2}{2} + c\right) e^a \\ 0 & e^a & be^a \\ 0 & 0 & e^a \end{pmatrix}.$$

La solution générale de $X' = AX$ est alors donnée par $X(t) = \exp(tA)X(0)$, soit, en posant $X(0) = (\alpha, \beta, \gamma)$

$$X(t) = \alpha e^{at} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{at} \begin{pmatrix} bt \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma e^{at} \begin{pmatrix} ct + \frac{b^2t^2}{2} \\ bt \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Exercice 12.</u> * Résoudre les systèmes différentiels suivants :

1. $$\begin{cases} x_1'(t) &= 6x_1(t) + 3x_2(t) - 3t + 4e^{3t} \\ x_2'(t) &= -4x_1(t) - x_2(t) + 4t - 4e^{3t}. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) + t \\ x_2'(t) &= -4x_1(t) - 3x_2(t). \end{cases}$$

   On donnera les solutions réelles.

<u>Solution</u> **<u>12.</u>** **.**

1. *Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice du système. Ses valeurs propres sont 2 et 3, avec vecteurs propres respectifs $(-3, 4)$ et $(4, -4)$. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base, c'est-à-dire*

   $$P = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \ P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Soit $Y(t) = \binom{y_1(t)}{y_2(t)}$ tel que $X(t) = PY(t)$. Le système se réécrit alors en

   $$PY'(t) = APY(t) + B(t) \iff Y'(t) = P^{-1}APY(t) + P^{-1}B(t),$$

   où $B(t) = \binom{-3t+4e^{3t}}{4t-4e^{3t}}$. Ainsi, on obtient le système différentiel diagonal suivant :

   $$\begin{cases} y_1'(t) &= 2y_1(t) + t \\ y_2'(t) &= 3y_2(t) + e^{3t}. \end{cases}$$

Il est désormais facile de résoudre séparément chacune des équations différentielles séparément, en cherchant notamment une solution particulière sous la forme d'une exponentielle-polynôme. On trouve alors que

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1(t) & = & \lambda e^{2t} - \frac{1}{4} \\ y_2(t) & = & \mu e^{3t} + te^{3t} \end{array}\right.$$

Revenant à $X(t)$, on trouve que les solutions du système différentiel initial sont les fonctions

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1(t) & = & -3\lambda e^{2t} + 4\mu e^{3t} + \frac{3t}{2} + \frac{3}{4} + 4te^{3t} \\ x_2(t) & = & 4\lambda e^{2t} - 4\mu e^{3t} - 2t - 1 - 4te^{3t}. \end{array}\right.$$

2. *La méthode est similaire, mais cette fois la matrice n'est diagonalisable que sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. On pose donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ la matrice du système. Ses valeurs propres sont $-1+2i$ et $-1-2i$, avec vecteurs propres respectifs $(1-i, 2i)$ et $(1+i, -2i)$. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base, c'est-à-dire*

$$P = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 2i & -2i \end{pmatrix}, \ P^{-1} = \frac{i}{4}\begin{pmatrix} -2i & -1-i \\ -2i & 1-i \end{pmatrix}.$$

Soit $Y(t) = \binom{y_1(t)}{y_2(t)}$ tel que $X(t) = PY(t)$. Le système se réécrit alors en

$$PY'(t) = APY(t) + B(t) \iff Y'(t) = P^{-1}APY(t) + P^{-1}B(t),$$

où $B(t) = \binom{t}{0}$. Ainsi, on obtient le système différentiel diagonal suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1'(t) & = & (-1+2i)y_1(t) + t/2 \\ y_2'(t) & = & (-1-2i)y_2(t) + t/2. \end{array}\right.$$

Ses solutions (complexes) sont

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1(t) & = & c_1 e^{(-1+2i)t} + \frac{t}{10} + \frac{3}{50} + \frac{it}{5} - \frac{2i}{25} \\ y_2(t) & = & c_1 e^{(-1-2i)t} + \frac{t}{10} + \frac{3}{50} - \frac{it}{5} + \frac{2i}{25} \end{array}\right.$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Si on revient à x_1 et x_2, et en remplaçant $e^{(-1+2i)t}$ par $e^{-t}(\cos(2t) + i\sin(2t))$, on trouve

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1(t) & = & \big((c_1+c_2) - i(c_1-c_2)\big)e^{-t}\cos(2t) + \big(i(c_1-c_2) + (c_1+c_2)\big)e^{-t}\sin(2t) + \frac{3t}{5} - \frac{1}{25} \\ x_2(t) & = & 2i(c_1-c_2)e^{-t}\cos(2t) - 2(c_1+c_2)e^{-t}\sin(2t) - \frac{4t}{5} + \frac{8}{25}. \end{array}\right.$$

On pose $\lambda = c_1 + c_2$ et $\mu = i(c_1 - c_2)$. Le couple (λ, μ) parcourt $\mathbb{C}^2$ lorsque (c_1, c_2) parcourt $\mathbb{C}^2$, et les solutions complexes du système sont

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1(t) & = & (\lambda-\mu)e^{-t}\cos(2t) + (\lambda+\mu)e^{-t}\sin(2t) + \frac{3t}{5} - \frac{1}{25} \\ x_2(t) & = & 2\mu e^{-t}\cos(2t) - 2\lambda e^{-t}\sin(2t) - \frac{4t}{5} + \frac{8}{25}. \end{array}\right.$$

Pour obtenir les solutions réelles, il suffit de prendre λ, μ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 13. ♡** Résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1' & = & (2-t)x_1 + (t-1)x_2 \\ x_2' & = & 2(1-t)x_1 + (2t-1)x_2. \end{array}\right.$$

Solution **13.** . *Posons*

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2-t & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

On doit résoudre le système $X'(t) = A(t)X(t)$. On va procéder comme pour une matrice à coefficients constants, en diagonalisant pour chaque t la matrice $A(t)$. Son polynôme caractéristique est $\chi_{A(t)}(X) =$

$X^2-(t+1)X+t$, dont les racines sont t et 1. Le miracle est que les vecteurs propres ne dépendent pas de t. En effet, si on pose $u_1=(1,1)$ et $u_2=(1,2)$, alors $A(t)u_1=u_1$ tandis que $A(t)u_2=tu_2$. Autrement dit, en posant

$$P=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix} \text{ et } D(t)=\begin{pmatrix}1&0\\0&t\end{pmatrix},$$

on a $A(t)=P(t)DP(t)^{-1}$. On peut donc résoudre le système exactement comme s'il était à coefficients constants. Plus précisément, en posant $Y(t)=P^{-1}X(t)$, alors Y est solution de $Y'(t)=D(t)Y(t)$, soit

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1' &=& y_1\\ y_2' &=& y_2.\end{array}\right.$$

Il vient $y_1(t)=Ce^t$, et $y_2(t)=De^{t^2/2}$, avec $C,D\in\mathbb{R}$. On revient à X par la relation $Y=PX$, et on trouve que les solutions de l'équation sont les fonctions

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1(t) &=& Ce^t+De^{t^2/2}\\ x_2(t) &=& Ce^t+2De^{t^2/2},\end{array}\right.$$

avec $C,D\in\mathbb{R}^2$.

<u>Exercice 14.</u> ** Résoudre le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& 2tx-y+t\cos t\\ y' &=& x+2ty+t\sin t.\end{array}\right.$$

On pourra, dans le système homogène, effectuer le changement de fonctions inconnues en posant $u=xe^{-t^2}$ et $v=ye^{-t^2}$.

<u>Solution</u> **<u>14.</u>** **.** *On considère le système homogène, et on obtient avec le changement de variables associé*

$$u'(t)=\big(-2tx(t)+x'(t)\big)e^{-t^2}=-v(t)$$

et

$$v'(t)=\big(-2ty(t)+y'(t)\big)e^{-t^2}=u(t).$$

Le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} u'(t) &=& -v(t)\\ v'(t) &=& u(t)\end{array}\right.$$

possède comme système fondamental de solutions les deux vecteurs

$$\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}.$$

Revenant au système initial, on trouve un système fondamental de solutions de l'équation homogène donné par les deux vecteurs

$$h_1(t)=\begin{pmatrix}\cos(t)e^{t^2}\\ \sin(t)e^{t^2}\end{pmatrix} \text{ et } h_2(t)=\begin{pmatrix}-\sin(t)e^{t^2}\\ \cos(t)e^{t^2}\end{pmatrix}.$$

On cherche une solution de l'équation avec second membre par la méthode de variation des constantes. On pose donc $f(t)=\lambda(t)h_1(t)+\mu(t)h_2(t)$, et on trouve que

$$\lambda'(t)h_1(t)+\mu'(t)h_2(t)=\begin{pmatrix}t\cos t\\ t\sin t\end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\lambda_1'(t)=t^e-t^2$ et $\lambda_2'(t)=0$. Une solution particulière est donnée par $\lambda_1(t)=-\frac{1}{2}e^{-t^2}$ et $\lambda_2(t)=0$. La solution générale de l'équation est donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) &=& \lambda\cos(t)e^{t^2}-\mu\sin(t)e^{t^2}-\frac{1}{2}\cos(t)\\ y(t) &=& \lambda\sin(t)e^{t^2}+\mu\cos(t)e^{t^2}-\frac{1}{2}\sin(t)\end{array}\right.$$

3 Équations différentielles du second ordre

Exercice 15. ♡* Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $(1+e^x)y'' + 2e^x y' + (2e^x+1)y = xe^x$ en posant $z(x) = (1+e^x)y(x)$;
2. $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$, en posant $z = xy$.

Solution **15.** .

1. *z est deux fois dérivable et vérifie*

$$z'(x) = (1+e^x)y'(x) + e^x y(x),\ z''(x) = (1+e^x)y''(x) + 2e^x y'(x) + e^x y(x).$$

Il est facile de vérifier que y vérifie l'équation différentielle de départ si et seulement si z vérifie l'équation différentielle

$$z'' + z = xe^x.$$

Or, on a ici une équation différentielle à coefficients constants facile à résoudre, dont les solutions sont les fonctions $z(x) = A\cos x + B\sin x + \frac{x-1}{2}e^x$ avec $A, B \in \mathbb{R}$. Les fonctions y qui sont solutions de l'équation différentielle initiale sont donc les fonctions

$$y(x) = (1+e^x)^{-1}\left(A\cos x + B\sin x + \frac{x-1}{2}e^x\right).$$

2. *$z = xy$ est deux fois dérivable, et on a $z' = xy' + y$ et $z'' = xy'' + 2y'$. Ainsi, z vérifie l'équation*

$$z'' + 2z' + z = 0.$$

L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1$ dont 1 est racine double. Ainsi, z vérifie $\lambda xe^{-x} + \mu e^{-x}$. On en déduit que les solutions de l'équation initiale sur $]0, +\infty[$ ou sur $]-\infty, 0[$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu\frac{e^{-x}}{x}.$$

Soit maintenant y une solution sur $\mathbb{R}$. Alors, il existe des constantes $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2 \in \mathbb{R}$ telles que

$$y(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-x} + \mu_1 \frac{e^{-x}}{x} & si\ t > 0 \\ \lambda_2 e^{-x} + \mu_2 \frac{e^{-x}}{x} & si\ t < 0 \end{cases}$$

Pour que y admette une limite en 0, il est nécessaire que $\mu_1 = \mu_2 = 0$, puis que $\lambda_1 = \lambda_2$ pour que les limites à droite et à gauche coïncident. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation sont donc les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{-x}.$$

Exercice 16. * On considère l'équation différentielle notée (E) :

$$(t^2+t)x'' + (t-1)x' - x = 0.$$

1. Déterminer les solutions polynômiales de (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E) sur $]1, +\infty[$.

Solution **16.** .

1. *Soit P un polynôme solution de (E), et $a_n t^n$ son coefficient dominant. Alors le coefficient dominant de $(t^2+t)P'' + (t-1)P' - P$ est $(n(n-1)+n-1)a_n t^n$. Puisque P est solution de (E), il faut donc que $n(n-1)+n-1 = 0$, ce qui entraine $n = 1$. On cherche donc une solution de la forme $P(t) = at+b$. On procède par identification et on trouve facilement que les seules solutions polynômiales sont les polynômes de la forme $P(t) = \lambda(t-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.*

2. *On se ramène à une équation d'ordre 1, en posant* $y(t) = \frac{x(t)}{t-1}$ *(c'est possible puisqu'on travaille sur* $]1, +\infty[$*). On obtient donc* $x' = (t-1)y' + y$ *et* $x'' = (t-1)y'' + 2y'$*, et donc* x *est solution de* (E) *si et seulement si* y *vérifie*

$$(t^2+t)(t-1)y'' + \big(2(t^2+t) + (t-1)^2\big)y' = 0.$$

On écrit alors $\frac{y''}{y'}$ *sous forme d'une fraction rationnelle qu'on décompose en éléments simples, et on trouve :*

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{-2}{t-1} - \frac{2}{t+1} + \frac{1}{t}.$$

On intègre, et on trouve qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ *telle que*

$$\ln\big(y'(t)\big) = \ln\left(\frac{t}{(t-1)^2(t+1)^2}\right) + C.$$

Passant à l'exponentielle, il existe $\lambda > 0$ *tel que*

$$z'(t) = \frac{\lambda t}{(t^2-1)^2}$$

puis intégrant, il existe $\alpha > 0$ *et* $\mu \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$z(t) = \frac{\alpha}{(1-t^2)} + \mu$$

ce qui donne pour solutions de l'équation initiale

$$x(t) = -\frac{\alpha}{t+1} + \mu(t-1).$$

<u>Exercice 17.</u> ♡** Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On définit $\phi : E \to E$ par

$$\begin{array}{rcl} \phi(f) : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f'(t) + tf(t). \end{array}$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ.
2. Faire de même pour ϕ^2.
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + 2xy' + (x^2+3)y = 0.$$

<u>Solution</u> **17. .**

1. *Fixons* $\lambda \in \mathbb{C}$*. Alors, pour* $f \in E$*, on a*

$$\phi(f) = \lambda f \iff f' + (t-\lambda)f = 0.$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sous forme normale. L ethéorème de Cauchy-Lipschitz nous dit que l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de E *de dimension 1. Plus précisément, l'ensemble des solutions est engendré par la fonction*

$$f_\lambda(t) = e^{-t^2/2}e^{\lambda t}.$$

Tous les nombres complexes sont donc valeurs propres de ϕ*, l'espace propre associé étant la droite vectorielle de direction* f_λ*.*

2. *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $\lambda \neq 0$, alors il existe un nombre complexe $\mu \neq 0$ tel que $\lambda = \mu^2$. Mais alors, le polynôme $X^2 - \lambda$ se factorise en $(X-\mu)(X+\mu)$.*
On s'intéresse ici à $\ker(\phi^2 - \lambda Id)$. Par le théorème de décomposition des noyaux (les polynômes $X-\mu$ et $X+\mu$ sont premiers entre eux car $\mu \neq -\mu$), et donc

$$\ker(\phi^2 - \lambda Id) = \ker(\phi + \mu Id) \oplus \ker(\phi - \mu Id).$$

On en déduit que si $\lambda = \mu^2 \neq 0$, λ est une valeur propre de ϕ^2, d'espace propre de dimension 2 engendré par les deux fonctions f_μ et $f_{-\mu}$.
Enfin, si $\lambda = 0$, alors $\phi^2(f) = 0$ équivaut à

$$(f' + tf)' + t(f' + tf) = 0 \iff f'' + 2tf' + (t^2+1)f = 0.$$

Il faut alors résoudre cette équation d'ordre 2. Une façon de procéder est de remarquer que l'on connait déjà une solution, la fonction $y(t) = e^{-t^2/2}$, puisque un élément de $\ker(\phi)$ est nécessairement un élément de $\ker(\phi^2)$. On peut alors en déduire une deuxième solution indépendante par la méthode d'abaissement de l'ordre. Sinon, on peut aussi remarquer que

$$\phi^2(f) = 0 \implies \phi(f) \in \ker(\phi) \implies f' + tf = ae^{-t^2/2}.$$

On résout alors cette équation du premier ordre, le problème étant de trouver une solution particulière. Mais il est facile de remarquer que la fonction $t \mapsto te^{-t^2/2}$ convient. Finalement, on a aussi prouvé que 0 est une valeur propre de ϕ^2, le sous-espace propre associé étant engendré par les fonctions $t \mapsto e^{-t^2/2}$ et $t \mapsto te^{-t^2/2}$.

3. *On a déjà remarqué que*

$$\phi^2(f) = f'' + 2tf' + (t^2+1)f.$$

L'équation correspond donc à $\phi^2(y) = -2y$, c'est-à-dire qu'on cherche le sous-espace propre associé à -2 de l'endomorphisme ϕ^2. Les solutions sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto e^{-t^2/2}(ae^{it\sqrt{2}} + be^{-it\sqrt{2}}),\ a, b \in \mathbb{C}.$$

Si on cherche les solutions réelles, on trouve

$$t \mapsto e^{-t^2/2}\big(a\cos(t\sqrt{2}) + b\sin(t\sqrt{2})\big),\ a, b \in \mathbb{R}.$$

<u>Exercice 18.</u> ♡* L'objet de cet exercice est l'étude de l'équation différentielle suivante :

$$E_\lambda : \quad xy'' + (1-x)\,y' - \lambda y = 0$$

où la fonction y est une fonction inconnue deux fois continûment dérivable de la variable x et λ un réel donné.

1. Solution de l'équation différentielle définie sur toute la droite réelle

1. Montrer qu'il existe une unique solution f_λ, de l'équation différentielle E_λ, développable en série entière prenant la valeur 1 en 0.
   On écrira

$$f_\lambda(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

   Préciser les fonctions f_1, f_0, f_{-1}, f_{-2}.
2. Pour quelles valeurs du réel λ, la fonction f_λ est-elle un polynôme ?
3. Quel est le rayon de convergence R de la série entière de terme général $a_n x^n$, $n \geq 1$, lorsque le réel λ est différent des valeurs obtenues précédemment ?

2. Solution de l'équation différentielle E_1 Dans cette question, le réel λ est égal à 1 :

$$E_1 : \quad xy'' + (1-x)\,y' - y = 0$$

a. Déterminer la solution générale f_1 de l'équation différentielle E_1 sur la demi-droite $]0,\infty[$, exprimer cette solution à l'aide de fonctions usuelles et de la fonction définie sur la demi-droite $]0,\infty[$ par la relation

$$x \mapsto \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

b. Déterminer de même la solution générale de l'équation différentielle E_1 sur la demi-droite $]-\infty,0[$.

c. Déterminer enfin les fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle E_1.

3. Relation entre les fonctions f_λ

Etant donné un réel λ, soit g_λ la fonction définie sur la droite réelle $\mathbb{R}$ par la relation suivante :

$$g_\lambda(x) = e^x f_\lambda(-x)$$

a. Déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par la fonction g_λ.

b. En déduire, en admettant que le produit de deux fonctions réelles développables en série entière sur la droite réelle $\mathbb{R}$ est encore une fonction développable en série entière sur la droite réelle $\mathbb{R}$, que, pour tous réels λ et x, il vient :

$$f_{1-\lambda}(x) = e^x f_\lambda(-x)$$

c. Préciser, lorsque p est un entier strictement positif, les fonctions f_p. En déduire les fonctions f_2 et f_3.

d. Soit p un entier donné supérieur ou égal à 1.

Que vaut la limite quand x tend vers $+\infty$ de l'expression $\dfrac{f_{p+1}(x)}{x f_p(x)}$?

Solution **18.** . **1. Solution de l'équation différentielle définie sur toute la droite réelle**

a. Soit $f_\lambda : x \mapsto 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ solution de E_λ sur $]-R,R[$, alors sur cet intervalle, f_λ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée première est la somme de la série dérivée $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, sa dérivée seconde est la somme de la série $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.
On a donc

$$x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \lambda \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right) = 0$$

ce qui après arrangement donne : $\sum_{n=1}^{\infty} \left((n+1)^2 a_{n+1} - (n+\lambda) a_n\right) x^n - \lambda + a_1 = 0$

D'où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie par $\begin{cases} a_1 = \lambda \\ \forall n \geq 1, \quad a_{n+1} = \frac{n+\lambda}{(n+1)^2} a_n \end{cases}$; on a donc pour tout $n \geq 1$:

$\boxed{a_n = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(k+\lambda)}{(n!)^2}\lambda}$

On aura en particulier :

$$f_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$
$$f_0 = 1$$
$$f_{-1}(x) = 1 - x$$
$$f_{-2}(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$$

b. f_λ est un polynôme si et seulement si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang. D'après l'expression de a_n précédemment déterminée, on en déduit que f_λ est un polynôme si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n + \lambda = 0$;
d'où $\boxed{f_\lambda \text{ est un polynôme si et seulement si } -\lambda \in \mathbb{N}}$

Lorsque $\lambda = -p$, *avec* $p \in \mathbb{N}$, *on a pour tout* $n \geq 1$, $\quad a_n = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(k-p)}{(n!)^2}(-p)$, *donc*
si $p \geq 1$, *alors* $a_p = (-1)^{p-1}\frac{(p-1)!}{(p!)^2}(-p) = \frac{(-1)^p}{p!}$, *formule qui reste valable si* $p = 0$, *puisqu'alors* $a_0 = 1$,
d'où $a_p \neq 0$, *et* $a_{p+1} = 0$, *puis* $\forall n \geq p+1, \quad a_n = 0$,
d'où $\boxed{f_{-p} \text{ est un polynôme de degré } p \text{ et de coefficient dominant } \frac{(-1)^p}{p!}}$

c. *Supposons que* f_λ *ne soit pas polynomiale, alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ *(car d'après l'expression trouvée pour* a_n, *la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est nulle à partir d'un certain rang si et seulement si il existe un entier* n *pour lequel* $a_n = 0$)
et on a alors $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+\lambda}{(n+1)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *; la règle de d'Alembert permet alors d'affirmer que la série entière* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *a pour rayon de convergence* $\boxed{R = \infty}$

2. Solution de l'équation différentielle E_1

a. *On effectue le changement de fonction inconnue* $z = y' - y$ *; l'équation* E_1 *se transforme en une équation différentielle linéaire du premier ordre en* z *:*

$$xz' + z = 0$$

Sur $]0, \infty[$, *cette équation est résolue en* z, *et a pour solutions les fonction du type* $x \mapsto ae^{-\int \frac{dx}{x}}$, *soit* $x \mapsto \frac{a}{x}$, *avec* $a \in \mathbb{R}$.
On revient alors en y *:* $y' - y = \frac{a}{x}$ *; c'est encore une équation différentielle linéaire du premier ordre résolue en* y, *mais qui n'est plus homogène ; on applique la méthode de variation de la constante, en cherchant* y *sous la forme* $\varphi(x)e^x$, *ce qui conduit à l'équation* $\varphi'(x) = \frac{ae^{-x}}{x}$.
Finalement, on peut conclure que f_1 *est une fonction du type* $\boxed{x \mapsto ae^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt + be^x}$, *où* a *et* b *sont des réels quelconques.*
Autre méthode : on remarque que $x \mapsto e^x$ *est solution de l'équation et on cherche les solutions sous la forme* $x \mapsto z(x)e^x$.

b. *La résolution sur* $]-\infty, 0[$ *est la même, et on obtient les solutions sous la forme* $\boxed{x \mapsto \alpha e^x \int_{-1}^x \frac{e^{-t}}{t}dt + \beta e^x}$ *où* α *et* β *sont des réels quelconques.*

c. $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ *n'est pas intégrable sur* $]0, 1]$ *et* $\frac{e^{-t}}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}$, *donc lorsque* $x \to 0$, *on a :* $\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt \underset{x\to 0}{\sim} \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$, *et donc* $\lim_{x\to 0} e^x \int_1^x \frac{e^t}{t}dt = -\infty$ *; de même,* $\lim_{x\to 0} e^x \int_{-1}^x \frac{e^t}{t}dt = -\infty$ *;*
Si φ *est solution de* E_1 *sur* $\mathbb{R}$, *sa restriction à* $]0, +\infty[$ *est solution de* E_1 *sur* $]0, +\infty[$, *sa restriction à* $]-\infty, 0[$ *est solution de* E_1 *sur* $]-\infty, 0[$, *et de plus* φ *est continue en* 0, *d'où si* φ *est solution sur* $\mathbb{R}$, *alors nécessairement il existe un réel* a *tel que* $\varphi : x \mapsto ae^x$ *sur* $\mathbb{R}^*$ *et donc aussi en* 0 *par continuité.*
Réciproquement, il est aisé de vérifier que les fonctions $x \mapsto ae^x$ *avec* $a \in \mathbb{R}$ *sont solutions de* E_1 *sur* $\mathbb{R}$.
Conclusion : $\boxed{\text{les solutions de } E_1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions } x \mapsto ae^x \text{ avec } a \in \mathbb{R}}$

3. Relation entre les fonctions f_λ

a. f_λ *est solution de* $E_\lambda : xy'' + (1-x)y' - \lambda y = 0$ *sur* $\mathbb{R}$.
g_λ *est définie par* $g_\lambda(x) = e^x f_\lambda(-x)$, *donc* g_λ *est deux fois continûment dérivable, et on a :*
$f_\lambda(x) = e^x g_\lambda(-x), \quad f'_\lambda(x) = e^x(g_\lambda(-x) - g'_\lambda(-x)), \quad f''_\lambda(x) = e^x(g_\lambda(-x) - 2g'_\lambda(-x) + g''_\lambda(-x))$
on a donc la relation :

$$-x(g_\lambda(x) - 2g'_\lambda(x) + g''_\lambda(x)) + (1+x)(g_\lambda(x) - g'_\lambda(x)) - \lambda g_\lambda(x) = 0 \text{ ou encore :}$$
$$xg''_\lambda(x) + (1-x)g'_\lambda(x) + (\lambda - 1)g_\lambda(x) = 0$$

ainsi, g_λ *est solution de l'équation différentielle du second ordre :*

$$\boxed{xy'' + (1-x)y' - (1-\lambda)y = 0}$$

b. *Ce qui signifie que g_λ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $E_{1-\lambda}$, or $g_\lambda(0) = f_\lambda(0) = 1$, de plus g_λ est produit de deux fonctions développables en séries entières sur $\mathbb{R}$, donc g_λ est développable en séries entières sur $\mathbb{R}$. Ainsi, g_λ est solution développable en séries entières sur $\mathbb{R}$ de E_λ telle que $g_\lambda(0) = 1$, donc par unicité (admise dans l'énoncé) on peut affirmer $g_\lambda = f_{1-\lambda}$, ce qui démontre la relation vérifiée par tous réels λ et x :*

$$\boxed{f_{1-\lambda}(x) = e^x f_\lambda(-x)}$$

c. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$;*
D'après la relation précédente : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_p(x) = e^x f_{1-p}(-x)$;
*or d'après **I-1.** f_{1-p} est la fonction polynomiale $x \mapsto 1 + \sum_{n=1}^{p-1} a_n x^n$ où $a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1-p)}{(n!)^2} = (-1)^n \frac{(p-1)!}{(p-n-1)!(n!)^2}$, d'où*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_p(x) = e^x + \sum_{n=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{(p-n-1)!\,(n!)^2} x^n e^x}$$

en particulier pour tout réel x :

$$\boxed{f_2(x) = e^x + xe^x et f_3(x) = e^x + 2xe^x + \tfrac{1}{2}x^2 e^x}$$

d. *Soit p un entier supérieur ou égal à 1, alors pour tout réel x : $f_{p+1}(x) = e^x f_{-p}(-x)$ et $f_p(x) = e^x f_{1-p}(-x)$, de plus, f_{-p} et f_{1-p}, sont des polynômes de degré respectif p et $p-1$, donc au voisinage de $+\infty$, $xf_p(x)$ ne s'annule pas et ainsi l'expression $\frac{f_{p+1}(x)}{xf_p(x)}$ est correctement définie. D'après **I-1.b.** on peut alors préciser :*

$$\frac{f_{p+1}(x)}{xf_p(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{(-1)^p}{p!}x^p}{\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}x^p}$$

d'où $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f_{p+1}(x)}{xf_p(x)} = \frac{-1}{p}}$

<u>Exercice 19.</u> ♡** Soient $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{C}^{n-1}(I, \mathbb{R})$. On appelle wronskien la fonction $W(f_1, \cdots, f_n) = \det\left(f_j^{(i-1)}\right)_{1\le i,j\le n}$.

1. Montrer que si la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est liée alors $W(f_1, \cdots, f_n) = 0$.
2. Soient $p_0, \cdots, p_{n-1} \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et (E) l'équation différentielle : $y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y = 0$. Si $(f_1, \cdots, f_n)$ sont des solutions de (E) et si $W(f_1, \cdots, f_n)$ s'annule, montrer que la famille est liée.
3. On suppose ici que $I = \mathbb{R}$. Soient $f : t \mapsto t^2$ et $g : t \mapsto |t| \times t$. Montrer que (f, g) est libre et que $W(f, g) = 0$.
4. On veut montrer que si $W(f_1, \cdots, f_n) = 0$ alors la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est linéairement dépendante sur un intervalle $]\alpha, \beta[$ inclus dans $]a, b[$.
   i) Soit $g \in \mathbb{C}^{n-1}(I, \mathbb{R})$. Montrer que $W(gf_1, \cdots, gf_n) = g^n W(f_1, \cdots, f_n)$.
   ii) On suppose que f_1 ne s'annule pas sur I. Montrer :

$$W(f_1, \cdots, f_n) = f_1^n W\left(\left(\frac{f_2}{f_1}\right)', \cdots, \left(\frac{f_n}{f_1}\right)'\right)$$

   .

   iii) Conclure.
   iv) Que dire de plus si $f_1, \cdots, f_n$ sont polynomiales ?

<u>Solution</u> **<u>19.</u>** **.**

1. *Immédiat*
2. *Comme* $W'(t) + p_0(t)W(t) = 0$, *si* W *s'annule,* W *est la fonction nulle (la fonction exponentielle ne s'annule pas !)*
3. *Si le wronskien s'annule en* x_0, *alors il existe* $(\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ *tel que* $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ *véifie*

$$\varphi(x_0) = \cdots = \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'affirmer que $\varphi = 0$.

4. (a) *La formule de Leibnitz nous dit que* $(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g^{(i)} f^{(k-i)}$. *L'application* det *est* n-*linéaire alternée sur les lignes. En partant de la la première ligne on annule tous les termes avec* $g^{(i)}$, *d'où le résultat.*
   (b) *On factorise par* f_1 *et on développe par rapport à la première colonne et le résultat est immédiat.*
   (c) *On procède par récurrence, si la propriété est vraie pour* $n-1$ *fonctions, alors* W *est nul implique que la famille* $\left(\left(\frac{f_2}{f_1}\right)', \cdots, \left(\frac{f_n}{f_1}\right)'\right)$ *est liée. On intègre la relation de dépendance et la constante est multipliée par* f_1, *d'où le résultat.*
   (d) *Si les fonctions sont polynômiales, la relation de dépendance est valide sur* $\mathbb{R}$, *puisque la relation forme elle-même un polynôme !*

4 Équation différentielles non linéaires

Exercice 20. ** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les applications f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = f(\lambda - x).$$

Solution **20.** . *Par récurrence, toute solution est de classe* C^∞. *Il est donc légitime de dériver cette équation, et on trouve*

$$f''(x) = -f'(\lambda - x) = -f\big(\lambda - (\lambda - x)\big) = -f(x).$$

Ainsi, f *est solution de l'équation différentielle* $f'' + f = 0$. *Il existe donc des constantes* C *et* θ *telles que*

$$f(x) = C\cos(x + \theta).$$

De $f'(x) = f(\lambda - x)$, *on trouve, pour* $C \neq 0$,

$$-\sin(x + \theta) = \cos(\lambda - x + \theta)$$

soit

$$\cos(\pi/2 + \theta + x) = \cos(\lambda - x + \theta).$$

Faisons $x = 0$. *On a donc ou bien*

$$\pi/2 + \theta = \lambda + \theta - 2k\pi$$

et donc $\lambda = \pi/2 + k\pi$, *ou bien*

$$\pi/2 + \theta = -\lambda - \theta + 2k\pi$$

et donc

$$\theta = -\frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Dans ce dernier cas, on vérifie facilement que la fonction va satisfaire l'équation demandée. Dans le premier, ie $\lambda = \pi/2 + 2k\pi$, *on a une solution ssi pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$-\sin(x + \theta) = \cos(\pi/2 - x + \theta) \iff \sin(-x - \theta) = \sin(x - \theta)$$

et cette dernière égalité est impossible à assurer pour toute valeur de x, et ce quelle que soit la valeur de θ. En résumé, les solutions sont les fonctions

$$f(x) = C\cos\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4} + k\pi\right),\ k = 0, 1,\ C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 21. ** Déterminer les fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) + f(-x) = e^x.$$

Solution **21.** . *Soit f une solution de cette équation. Alors, on a pour tout réel x, $f'(x) = e^x - f(-x)$. Ainsi, la fonction f' est de classe C^1 et donc f est de classe C^2. Dérivant cette équation, on trouve*

$$f''(x) - f'(-x) = e^x.$$

Or, $f'(-x) = e^{-x} - f(x)$, et donc l'équation devient

$$f''(x) + f(x) = e^x + e^{-x}.$$

On résout alors cette équation différentielle linéaire du second ordre. Les solutions de l'équation sans second membre sont les fonctions $x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Une solution particulière est donnée par la fonction cosh. *Ainsi, si f est solution de l'équation initiale, on sait qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$f(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + \cosh(x).$$

Ici, il faut prendre garde au fait que l'on n'a pas procédé par équivalence. En effet, on a dérivé l'équation, et rien ne dit que toute solution de l'équation différentielle du second ordre est une solution de l'équation initiale. On doit vérifier pour quelles valeurs de λ et μ c'est effectivement le cas. On a :

$$f'(x) = -\lambda\sin x + \mu\cos x + \sinh x$$

et on doit donc avoir, pour tout réel x

$$(-\lambda - \mu)\sin x + (\mu + \lambda)\cos x + e^x = e^x.$$

Si on fait $x = 0$, on trouve que $\mu = -\lambda$. Et réciproquement, toute fonction $x \mapsto \lambda(\cos x - \sin x) + \cosh x$, $\lambda \in \mathbb{R}$, est solution de l'équation.

Exercice 22. ** Résoudre l'équation différentielle suivante

$$y'^2 + y^2 = 1.$$

Solution **22.** . *On dérive l'égalité de part et d'autre :*

$$y'^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 2y''y' + 2y'y = 0 \Rightarrow y'' + y = 0 \text{ si } y'(t) \neq 0.$$

Si y' s'annule sur un intervalle, alors y est contante sur cet intervalle et les seules solutions constantes sont $y = 1$ ou $y = -1$.
Soit I un intervalle sur lequel y' ne s'annule pas, alors $y = A\cos(x + \varphi)$ avec A et $\varphi \in \mathbb{R}$. On remplace dans l'équation et on obtient

$$A^2\sin^2(x + \varphi) + A^2\cos^2(x + \varphi) = 1$$

d'où $A = \pm 1$. Ces solutions sont définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 23. ** Résoudre l'équation différentielle $y' = |y - x|$.

Solution **23.** . *Commençons d'abord par résoudre l'équation $y' = y - x$. L'équation homogène admet pour solutions les fonctions $x \mapsto Ce^x$, et une solution particulière est la fonction $x \mapsto x + 1$. L'ensemble des solutions de cette équation est donc constituée des fonctions*

$$x \mapsto Ce^x + (x + 1).$$

De la même façon, on résout l'équation $y' = -(y-x) = -y+x$, et on trouve que ces solutions sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto De^{-x} + (x-1).$$

Retournons à l'équation de départ. Les fonctions $y_1(x) = Ce^x + (x+1)$ qui vérifient $y_1(x) \geq x$ pour tout réel x sont solutions. De plus, $y_1(x) = x$ correspond à l'équation $Ce^x = -1$, et cette équation admet une solution si et seulement si $C < 0$, la solution étant $x = -\ln(-C)$. De même, $y_2(x) = De^{-x} + (x-1)$ qui vérifient $y_2(x) \leq x$ pour tout réel x sont solutions. De plus, $y_2(x) = x$ correspond à l'équation $De^{-x} = 1$, et cette équation admet une solution si et seulement si $D > 0$, la solution étant $x = \ln(D)$. On en déduit qu'il existe donc 3 types de solution :

1. *Les solutions de la forme $x \mapsto Ce^x + (x+1)$, avec $C > 0$. Ce sont les solutions qui sont toujours situées au-dessus de la droite $y = x$.*
2. *Les solutions de la forme $x \mapsto De^{-x} + (x-1)$, avec $D < 0$. Ce sont les solutions qui sont toujours situées au-dessous de la droite $y = x$.*
3. *Les solutions définies par*

$$x \mapsto \begin{cases} Ce^x + (x+1),\ C < 0 & \text{pour } x \leq x_0 \\ De^{-x} + (x-1),\ D > 0 & \text{pour } x \geq x_0 \end{cases}$$

   où x_0 est tel que $Ce^{x_0} + x_0 + 1 = De^{-x_0} + (x_0 - 1) = x_0$, soit $x_0 = -\ln(-C) = \ln(D)$. En particulier, on a $C = -1/D$. Ces solutions sont celles qui coupent la droite $y = x$. Remarquons qu'elles sont toujours comprises entre les droites $y = x+1$ et $y = x-1$ qui sont des solutions de l'équation (ce sont des barrières pour les solutions).

Équations différentielles

(Solutions)