

Corrigé Centrale 2017 MP Maths 1

Pour gagner du temps, on notera $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{G}_{n,p} = \mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{R})$ et la norme 2 des matrices sera notée $\| \cdot \|$ tout simplement.

I Résultats préliminaires

I.A - Distance de A à A_s

- I.A.1)** L'énoncé nous rappelle que $\mathcal{M}_n = \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$, donc $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont supplémentaires. Si $S \in \mathcal{S}_n$ et $A \in \mathcal{A}_n$, $\text{tr}(A^T B) = \text{tr}((A^T B)^T) = \text{tr}(B^T A) = -\text{tr}(BA) = -\text{tr}(AB)$, d'où $\langle A, B \rangle = 0$, donc $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont orthogonaux. Classiquement, $\dim \mathcal{S}_n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathcal{A}_n = \frac{n(n-1)}{2}$.
- I.A.2)** $A - S = A_s - S + A_a$, avec $A_s - S$ orthogonal à A_a donc $\|A - S\|^2 = \|A_s - S\|^2 + \|A_a\|^2$, d'où $\|A - A_s\| \leq \|A - S\|$ avec égalité si et seulement si $S = A_s$.

I.B - Valeurs propres de A_s

- I.B.1)** Soit $(V_1, \dots, V_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres colonnes de A , pour les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, positives par hypothèse. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ que l'on décompose dans cette base sous la forme $X = \sum_{i=1}^n x_i V_i$. Alors $X^T A_s X = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq 0$.

Inversement, si $\forall X, X^T A_s X \geq 0$, on l'applique à un vecteur propre V_i et on obtient $\lambda_i \geq 0$, d'où l'équivalence.

En remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes, on obtient de même la seconde équivalence.

- I.B.2)** On utilisera dans la suite le résultat suivant : si A est une matrice antisymétrique réelle et X un vecteur colonne, alors $X^T A X = 0$. En effet, $X^T A X = (X^T A X)^T = X^T (-A) X$, d'où $X^T A X = 0$.

On l'applique à un vecteur propre de A pour la valeur propre λ : $X^T A X = X^T A_s X = \lambda \|X\|^2$ et $X^T A X = X^T A_s X$. Avec les notations du B.1 (dans une base orthonormale de vecteurs propres de A_s), $X = \sum_{i=1}^n x_i V_i$, d'où $X^T A_s X = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ et $\|X\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$, d'où $\min \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A_s) \|X\|^2 \leq X^T A_s X \leq \max \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A_s) \|X\|^2$, d'où $\min \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A_s) \leq \lambda \leq \max \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A_s)$.

- I.B.3)** a) D'après le théorème spectral, il existe P orthogonale et $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A_s = P D P^{-1}$ et les λ_i sont strictement positifs d'après B.1. On note B la matrice $P \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P^{-1}$. Alors B est symétrique, définie positive d'après B.1, et $B^2 = A_s$.

L'unicité est prouvée en dernière page.

- b) $A = A_s + A_a = B(I_n + B^{-1} A_a B^{-1})B$. On pose $Q = B^{-1} A_a B^{-1}$, Q est antisymétrique et $\det A = (\det B)^2 \det(I_n + Q) = \det A_s \det(I_n + Q)$.

- c) Soit $Q \in \mathcal{A}_n$. D'après B.2, la seule valeur propre réelle possible de Q est 0 et $-Q^2$ est symétrique positive car $X^T Q^2 X = -\|QX\|^2 \leq 0$, donc en trigonalisant Q , on en déduit que chaque valeur propre non nulle de Q est imaginaire pur car son carré est réel négatif.

Si λ est imaginaire pur, $(1 + \lambda)(\overline{1 + \lambda}) \geq 1$. Comme le déterminant est le produit des valeurs propres (comptées avec multiplicité), on en déduit en groupant chaque valeur propre avec son conjugué (même ordre de multiplicité) que $\det(I_n + Q) \geq 1$, or $\det A_s > 0$, d'où $\det A \geq \det A_s$.

- I.B.4)** La matrice $B = A(A^{-1})_s A^T$ est symétrique et $A(A^{-1})_a A^T$ est antisymétrique. $A^{-1} = (A^{-1})_s + (A^{-1})_a$, d'où $B = A^T - A(A^{-1})_a A^T$, d'où $A^T = B + A(A^{-1})_a A^T$. Or $A^T = A_s - A_a$, d'où par unicité de la décomposition, $A_s = B = A(A^{-1})_s A^T$. On en déduit $\det(A_s) = \det(A) \det((A^{-1})_s) \det(A^T) = (\det A)^2 \det((A^{-1})_s)$.

I.C - Partie symétrique des matrices orthogonales

I.C.1) Soit λ une valeur propre de A_s et X un vecteur propre associé. On a $X^T A X = X^T A_s X + X^T A_a X = X^T A_s X = \lambda \|X\|^2$, or $|X^T A X| = |\langle X, AX \rangle| \leq \|X\| \|AX\|$ par Cauchy-Schwarz, d'où $|X^T A X| \leq \|X\|^2$, d'où $|\lambda| \leq 1$, d'où $\lambda \in [-1, 1]$.

I.C.2) Si $A = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, $A_s = (\cos \theta) I_2$ donc $\text{Sp } A_s = \{\cos \theta\}$. Si $A = S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, $A_s = A$ et $\text{Sp } A_s = \{-1, 1\}$.

Pour avoir un contre-exemple, il suffit de prendre $S = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $0 < \lambda < 1$ et $-1 < \mu < 0$.

I.C.3) a) Par théorème spectral, en groupant les valeurs propres distinctes de ± 1 par deux, il existe P orthogonale telle que $S = P D P^{-1}$ avec $D = \text{Diag}(\lambda_1 I_2, \dots, \lambda_k I_2, I_p, -I_q)$.
Pour tout i , il existe θ_i tel que $\lambda_i = \cos \theta_i$. On pose $A_s = P \Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \text{Diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_k}, I_p, -I_q)$ et $A_a = P B P^{-1}$ avec $B = \text{Diag}(B_{\theta_1}, \dots, B_{\theta_k}, 0)$ avec $B_\theta = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta \\ \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$. On a bien $A_s = S$, la matrice A_a est antisymétrique et $A = A_s + A_a$ est orthogonale.
b) Par le théorème de réduction des matrices orthogonales, il existe P orthogonale telle que $P^{-1} A P = \text{Diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_k}, I_p, -I_q)$. On en déduit $A_s = P \text{Diag}((\cos \theta_1) I_2, \dots, (\cos \theta_k) I_2, I_p, -I_q) P^{-1}$, or $A_s = S$ d'où $\text{Sp}_{\mathbb{R}} S \subset \{-1, 1\}$. Les valeurs propres de S autres que ± 1 apparaissent par deux dans la forme diagonalisée, donc les espaces propres associés sont de dimension paire (la dimension est égale à l'ordre de multiplicité car S est diagonalisable).

II Matrices F -singulières

II.A - Cas où F est un hyperplan

II.A.1) Soit X un vecteur colonne non nul. On a l'équivalence : $AX = 0 \iff \forall Z \in E_n, Z^T A X = 0$, donc A est singulière si et seulement si A est E_n -singulière.

II.A.2) Comme H est un hyperplan, $H^\perp = \text{Vect } N$.

Si A est H -singulière, il existe X non nul tel que $AX \in H^\perp$, d'où l'existence d'un réel λ tel que $AX = \lambda N$.

Inversement, si $AX = \lambda N$, alors $AX \in H^\perp$, d'où A est H -singulière.

II.A.3) Si A est H -singulière, on écrit $AX = \lambda N$, de sorte que $A_N \begin{pmatrix} X \\ -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX - \lambda N \\ N^T X \end{pmatrix} = 0$, or X est non nul, donc A_N est singulière.

Le raisonnement se remonte : si A_N est singulière, il existe $Y = \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix}$ non nul tel que $A_N Y = 0$, d'où $AX = -\alpha N$ et X orthogonal à N , de plus $X \neq 0$ (car sinon, $\alpha = 0$ d'où $Y = 0$), donc A est H -singulière.

II.A.4) Avec les notations de l'énoncé, $A_N B = \begin{pmatrix} AB_1 + NB_3 & AB_2 + NB_4 \\ N^T B_1 & N^T B_2 \end{pmatrix}$.

On pose $B_1 = A^{-1}$, $B_2 = -A^{-1}N$, $B_4 = 1$ et on choisit pour B_3 un vecteur ligne orthogonal à N .

On obtient alors $A_N B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ N^T A^{-1} & -N^T A^{-1}N \end{pmatrix}$.

II.A.5) Avec les notations précédentes, $B \begin{pmatrix} I_n & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$. En calculant le déterminant par blocs, $\det B = \det(A^{-1})$. D'autre part, $\det(A_N B) = -N^T A^{-1}N$, d'où $\det A_N = -N^T A^{-1}N(\det A)$.

II.A.6) Par hypothèse, il existe $N \in E_n$ non nul tel que $(A^{-1})_s N = 0$, d'où $N^T A^{-1}N = N^T A_s^{-1}N = 0$, d'où $\det A_N = 0$. D'après A.3, A est H -singulière, où H est l'hyperplan orthogonal à N .

II.A.7) Si $\det A_s = 0$, d'après I.B.4, sachant que $\det A \neq 0$, on a $\det((A^{-1})_s) = 0$, donc on peut appliquer la question précédente.

II.A.8 Si A était H -singulière pour un certain hyperplan H , en notant N un vecteur unitaire orthogonal à H , il existerait X non nul dans H et λ réel tels que $AX = \lambda N$, d'où $X^T A_s X = X^T A X = \lambda X^T N = 0$, or A_s est définie positive, donc $X = 0$: contradiction.

II.B - Exemple

II.B.1) Après calcul, $\det A(\mu) = 1$ donc $A(\mu)$ est inversible.

II.B.2) $A(\mu)_s = \begin{pmatrix} 2-\mu & -1 & \frac{1}{2}\mu \\ -1 & 2-\mu & \frac{1}{2}\mu-1 \\ \frac{1}{2}\mu & \frac{1}{2}\mu-1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det A(\mu)_s = \frac{1}{2}\mu^3 - \frac{3}{2}\mu^2 + 1 = \frac{1}{2}(\mu-1)(\mu^2 - 2\mu - 2)$. On en déduit que $A(\mu)_s$ est singulière si et seulement si $\det A(\mu)_s = 0$, c'est-à-dire $\mu \in \{1, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\}$.

II.B.3) $A = A(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Après calcul, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $(A^{-1})_s = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'après A.5, on cherche N non nul appartenant à $\text{Ker}(A^{-1})_s$, le vecteur colonne $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient,

d'où l'hyperplan H d'équation $z = 0$. Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in H$, $AX = \begin{pmatrix} x-y \\ -x+y \\ -y \end{pmatrix}$, donc le vecteur

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à H et $AX = -N$, donc A est H -singulière.

II.C - Cas où F est de dimension $n-2$

II.C.1) A est F -singulière $\iff \exists X \in F \setminus \{0\}, AX \in F^\perp \iff \exists X \in F \setminus \{0\}, \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, AX = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2$.

II.C.2) Si A est F -singulière, on écrit $AX = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2$, de sorte que $A_N \begin{pmatrix} X \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX - \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \\ N_1^T X \\ N_2^T X \end{pmatrix} = 0$,
or X est non nul, donc A_N est singulière.

Le raisonnement se remonte : si A_N est singulière, il existe $Y = \begin{pmatrix} X \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ non nul tel que $A_N Y = 0$,
d'où $AX = -\alpha N_1 - \beta N_2$ et X orthogonal à N_1 et à N_2 donc $X \in H$, de plus $X \neq 0$ (car sinon, $\alpha = \beta = 0$ car (N_1, N_2) est libre, d'où $Y = 0$), donc A est F -singulière.

II.C.3) La démarche est analogue à celle de la question II.A.4.

On pose $B_1 = A^{-1}$, $B_2 = -A^{-1}N = (-A^{-1}N_1 \quad -A^{-1}N_2)$, $B_4 = I_2$ et on choisit $B_3 = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$ avec L_i vecteur ligne orthogonal à N_i pour $i \in \{1, 2\}$. On obtient alors le résultat attendu.

II.C.4) Comme au II.A.5, $B \begin{pmatrix} I_n & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$ d'où $\det B = \det(A^{-1})$. D'autre part, $\det(A_N B) = \det(-N^T A^{-1} N) = \det(N^T A^{-1} N)$, d'où $\det A_N = \det(N^T A^{-1} N) \det A$.

II.C.5) Soit $P \in \mathcal{G}_{n,2}$ tel que $\det(P^T A^{-1} P) = 0$. En transposant, on obtient $\det(P^T (A^{-1})^T P) = 0$.
On pose $P' = (A^{-1})^T P$, qui appartient à $\mathcal{G}_{n,2}$ car A est inversible. Alors $P'^T A P' = P^T A^{-1} A (A^{-1})^T P = P^T (A^{-1})^T P$ d'où $\det(P'^T A P') = 0$. L'implication inverse est identique en changeant A en A^{-1} .

II.C.6) $N'^T A N' = \begin{pmatrix} N_1'^T \\ N_2'^T \end{pmatrix} (A N'_1 \quad A N'_2) = \begin{pmatrix} N_1'^T A N'_1 & N_1'^T A N'_2 \\ N_2'^T A N'_1 & N_2'^T A N'_2 \end{pmatrix}$.
 $\det(N'^T A N') = (N_1'^T A N'_1)(N_2'^T A N'_2) - (N_2'^T A N'_1)(N_1'^T A N'_2)$.

Or $N_2'^T A N_1' = N_2'^T A_s N_1' + N_2'^T A_a N_1' = N_1'^T A_s N_2' - N_1'^T A_a N_2'$ en transposant.
 $N_1'^T A N_2' = N_1'^T A_s N_2' + N_1'^T A_a N_2'$.

En multipliant, on obtient $(N_2'^T A N_1')(N_1'^T A N_2') = (N_1'^T A_s N_2')^2 - (N_1'^T A_a N_2')^2$.

Comme $N_1'^T A N_1' = N_1'^T A_s N_1'$, on en déduit que :

$$\det(N'^T A N') = (N_1'^T A_s N_1')(N_2'^T A_s N_2') - (N_1'^T A_s N_2')^2 + (N_1'^T A_a N_2')^2.$$

II.C.7) Comme A_s est définie positive, l'application $(X, Y) \mapsto X^T A_s Y$ est un produit scalaire sur E_2 : il suffit pour le justifier d'orthodiagonaliser A_s dans une base (V_1, V_2) et d'écrire $X = x_1 V_1 + x_2 V_2$ pour obtenir $X^T A_s X = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$ avec λ_1 et λ_2 valeurs propres de A_s strictement positives.

Par Cauchy-Schwarz appliqué à ce produit scalaire, on en déduit que $(N_1'^T A_s N_2')^2 < (N_1'^T A_s N_1')(N_2'^T A_s N_2')$, l'inégalité stricte venant du fait que N_1' et N_2' ne sont pas colinéaires.

On en déduit que $\det(N'^T A N') > 0$ pour $N' = (N_1' \ N_2') \in \mathcal{G}_{n,2}$.

En appliquant la question C.5, on en déduit que $\det(N^T A^{-1} N) > 0$ pour tout $N \in \mathcal{G}_{n,2}$.

II.C.8 D'après les questions C.7 et C.4, si F est de dimension $n - 2$, $\det A_N > 0$, donc A est F -régulière.

II.D - Exemple

II.D.1) $A_s = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, on choisit $N_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartenant à $\text{Ker } A_s$. $A_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

On cherche $N_2' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ non colinéaire à N_1' tel que $N_1'^T A_s N_2' = N_1'^T A_a N_2' = 0$. La condition

$N_1'^T A_s N_2' = 0$ est vérifiée (il suffit de transposer) et la seconde condition se traduit par $z = 0$,

on choisit donc $N_2' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $x \neq y$, par exemple $N_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. D'après C.6, on a alors

$$\det(N'^T A N') = 0.$$

II.D.2) On pose alors $N = A^T N' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. D'après C.5, $\det(N^T A^{-1} N) = \det(N'^T A N') = 0$.

D'après C.4, $\det(A_N) = 0$, donc $F = \text{Vect}(N_1, N_2)^\perp$ est tel que A est F -singulière.

Ici, $F = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -N_1$, ce qui confirme que A est F -singulière.

II.E - Cas général

II.E.1) On se place toujours dans le cas où A est inversible.

On note $(N_1, \dots, N_p)$ une base de $F^\perp$ et N la matrice $(N_1 \ \dots \ N_p)$ qui appartient à $\mathcal{G}_{n,p}$.

En posant $N' = (A^{-1})^T N$, on a bien $N' \in \mathcal{G}_{n,p}$ et $N'^T A N' = N^T (A^{-1})^T N = (N^T A^{-1} N)^T$, d'où $\det(N' A^T N') = \det(N^T A^{-1} N)$.

En suivant la même démarche qu'au II.A et II.C, on voit que A est F -singulière si et seulement si

$A_N = \begin{pmatrix} A & N \\ N^T & 0 \end{pmatrix}$ est singulière. En introduisant comme au II.A et II.C une matrice B judicieuse,

on obtient que $\det(A_N) = \det(-N^T A^{-1} N) \det(A)$, donc A est F -singulière si et seulement si $\det(N' A^T N') = 0$.

II.E.2) On observe d'abord que $N' \in \mathcal{M}_{n,p}$ est de rang p donc est injective par théorème du rang.

Comme $N'^T A_a N'$ est antisymétrique, $X^T N'^T A N' X = X^T N'^T A_s N' X = (N' X)^T A_s (N' X) > 0$ car $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $N' X \neq 0$ car $X \neq 0$ et N' injective.

II.E.3) Si λ est valeur propre réelle de $N'^T A N'$ pour un vecteur propre X , on a $X^T N'^T A N' X = \lambda \|X\|^2$ et $X^T N'^T A N' X > 0$ d'après E.2, donc $\lambda > 0$.

II.E.4) On peut grouper chaque valeur propre non réelle de $N'^T A N'$ avec sa conjuguée (les deux ayant même ordre de multiplicité), le produit est donc un réel > 0 . Comme les valeurs propres réelles sont > 0 d'après E.3, et que le déterminant est le produit des valeurs propres (comptées avec multiplicité), on en déduit que $\det(N'^T A N') > 0$.

II.E.5) D'après E.1 et E.4, A est F -régulière pour tout sous-espace vectoriel $F \neq \{0\}$.

III Matrices positivement stables

III.A - Exemples

III.A.1) $\chi_A(X) = X^2 - (\text{tr } A)X + \det A$. On note λ et μ les valeurs propres, éventuellement confondues, de A . On a $\lambda + \mu = \text{tr } A$ et $\lambda\mu = \det A$.

Si λ et μ sont réelles, elles sont strictement positives si et seulement si leur somme et leur produit le sont, c'est-à-dire $\text{tr } A > 0$ et $\det A > 0$.

Sinon, μ est conjugué de λ et $\lambda\mu = \det A > 0$, donc $\text{Re}(\lambda) = \frac{1}{2} \text{tr } A$. D'où l'équivalence.

III.A.2) a) On choisit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A^T$. 1 est la seule valeur propre de A , et de même pour B , donc

A et B sont positivement stables, mais $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres 0 et 4 donc n'est pas positivement stable.

b) Soit λ une valeur propre de $A+B$, l'espace propre $E_\lambda(A+B)$ est stable par A car A commute avec $A+B$. On peut considérer une valeur propre complexe λ_1 de la restriction de A à $E_\lambda(A+B)$ et un vecteur propre V associé. On a alors $BV = (A+B)V - AV = (\lambda - \lambda_1)V$, donc λ_1 est valeur propre de A et $\mu_1 = \lambda - \lambda_1$ est valeur propre de B , d'où $\text{Re}(\lambda) = \text{Re}(\lambda_1) + \text{Re}(\mu_1) > 0$. On en déduit que $A+B$ est positivement stable.

III.A.3) a) $\bar{X}^T A X = (Y^T - iZ^T)A(Y + iZ)$, d'où $\text{Re}(\bar{X}^T A X) = Y^T A Y + Z^T A Z = Y^T A_s Y + Z^T A_s Z \geq 0$ et ne peut s'annuler que si Y et Z sont nuls car A_s est définie positive, donc si $X \neq 0$, alors $\text{Re}(\bar{X}^T A X) > 0$.

b) Soit λ une valeur propre de A et $X = Y + iZ$ un vecteur propre associé. $AX = \lambda X$ d'où $\bar{X}^T A X = \lambda \bar{X}^T X = \lambda(\|Y\|^2 + \|Z\|^2)$, d'où $\text{Re}(\bar{X}^T A X) = \text{Re}(\lambda)(\|Y\|^2 + \|Z\|^2)$. Comme $\|Y\|^2 + \|Z\|^2 > 0$, on déduit du a) que $\text{Re}(\lambda) > 0$ donc A est positivement stable.

III.A.4) On reprend $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui est positivement stable, mais $A_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est singulière donc n'est pas définie positive.

III.B -

III.B.1) La solution générale de l'équation différentielle $y' + \lambda y = v$ s'écrit $y(x) = e^{-\lambda x} \int_0^x e^{\lambda t} v(t) dt + A e^{-\lambda x}$ où A est un scalaire, donc u est de cette forme.

On suppose $x \geq 0$: $|e^{-\lambda x}| = e^{-\text{Re}(\lambda)x} \leq 1$. $\left| e^{-\lambda x} \int_0^x e^{\lambda t} v(t) dt \right| \leq \|v\|_\infty \int_0^x e^{\text{Re}(\lambda)(t-x)} dt = \frac{\|v\|_\infty}{\text{Re}(\lambda)} (1 - e^{-\text{Re}(\lambda)x}) \leq \frac{\|v\|_\infty}{\text{Re}(\lambda)}$. Il en résulte que u est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

III.B.2) A la dernière ligne, on obtient $u'_n + \lambda_n u_n = 0$, donc $u_n(t) = A e^{-\lambda_n t}$, donc u_n est bornée. Si $u_n, u_{n-1}, \dots, u_{i+1}$ sont bornées, on obtient à la ligne i que $u'_i + \lambda_i u_i = -\sum_{j=i+1}^n a_{i,j} u_j$, or $-\sum_{j=i+1}^n a_{i,j} u_j$ est bornée donc d'après B.1, u_i est bornée.

Par récurrence descendante, on en déduit que les fonctions u_i , où i décrit $\llbracket 1, n \rrbracket$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

III.B.3) On observe déjà que $e^{\alpha t} \exp(-tA) = \exp(-t(A - \alpha I_n))$ car les deux fonctions de t de part et d'autre de l'égalité sont solutions du même problème de Cauchy linéaire ($M' + (A - \alpha I_n)M = 0$, $M(0) = I_n$) dans $\mathcal{M}_n$ donc sont égales par théorème de Cauchy linéaire.

On trigonalise A : $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire supérieure, d'où $A - \alpha I_n = P(T - \alpha I_n)P^{-1}$. Cela entraîne $\exp(-t(A - \alpha I_n)) = P \exp(-t(T - \alpha I_n))P^{-1}$ (élever à la puissance k , sommer puis passer à la limite).

Soit X appartenant à E_n . La fonction $U : t \mapsto \exp(-t(T - \alpha I_n))X$ vérifie $U'(t) + (T - \alpha I_n)U(t) = 0$ et les valeurs propres de $T - \alpha I_n$ sont de parties réelles > 0 donc par la question B.2, U est bornée sur $\mathbb{R}^+$. En prenant pour X les vecteurs de la base canonique de E_n , on en déduit que la fonction $t \mapsto \exp(-t(T - \alpha I_n))$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Il résulte alors des remarques initiales que $t \mapsto e^{\alpha t} \exp(-tA)$ est également bornée sur $\mathbb{R}^+$.

III.C - Une caractérisation des matrices positivement stables

III.C.1) On définit $f : M \mapsto A^T M$ et $g : M \mapsto MA$: f et g sont deux endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si P est un polynôme, $P(f)$ est l'endomorphisme $M \mapsto P(A^T)M$ et $P(g)$ est l'endomorphisme $M \mapsto MP(A)$. On en déduit que A , f et g ont les mêmes polynômes annulateurs, donc les mêmes valeurs propres (car ce sont les racines du polynôme minimal), donc f et g sont positivement stables. Comme f et g commutent et que $\Phi = f + g$, on déduit de la question A.2.b que Φ est positivement stable.

III.C.2) a) D'après C.1, 0 n'est pas valeur propre de Φ , donc Φ est un isomorphisme et donc I_n admet un unique antécédent par Φ , d'où l'existence d'une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^T B + BA = I_n$.

b) En transposant, on obtient $\Phi(B) = I_n = B^T A + A^T B^T = \Phi(B^T)$, donc $B = B^T$ par injectivité de Φ , d'où B est symétrique.

On a $B(A + B^{-1}A^T B) = I_n$, donc B est inversible.

La relation s'écrit $BA + (BA)^T = I_n$, donc par unicité de la décomposition dans $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$, on obtient $BA = \frac{1}{2}I_n + D$ avec D antisymétrique. En passant au déterminant, on obtient $2^n (\det A) (\det B) = \det(I_n + 2D) \geq 2^n$ d'après I.B. Les valeurs propres de A sont de partie réelle > 0 , donc en groupant les valeurs propres non réelles avec leurs conjuguées et en les multipliant, on obtient $\det A > 0$, ce qui entraîne $\det B > 0$.

III.C.3) a) Si $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, la matrice $M^T M$ est symétrique et positive car pour $X \in E_n \setminus \{0\}$, $X^T M^T M X = \|MX\|^2 > 0$.

Comme $(\exp(-tA))^T = \exp(-tA^T)$ (on écrit $\frac{1}{k!}((-tA)^k)^T = \frac{1}{k!}(-tA^T)^k$, on somme de $k = 0$ à K puis on fait tendre K vers $+\infty$), en posant $M = \exp(-tA)$, M est inversible (d'inverse $\exp(tA)$) et $V(t) = M^T M$, donc $V(t) \in \mathcal{S}_n^{++}$.

La transposition des matrices est linéaire, donc $W(t)^T = \int_0^t V(s)^T ds = W(t)$.

Pour $X \in E_n \setminus \{0\}$, $X^T W(t) X = \int_0^t X^T V(s) X ds$. La fonction intégrée est continue strictement positive donc $X^T W(t) X > 0$ donc $W(t) \in \mathcal{S}_n^{++}$.

b) D'après les rappels, $V'(t) = -A^T V(t) - V(t)A$, donc $A^T W(t) + W(t)A = \int_0^t (A^T V(s) + V(s)A) ds = \int_0^t -V'(s) ds = V(0) - V(t) = I_n - V(t)$.

c) D'après B.3, en choisissant α tel que $0 < \alpha < \min_{1 \leq j \leq n} \text{Re}(\lambda_j)$, on obtient que lorsque t tend vers $+\infty$, $\exp(-tA) = O(e^{-\alpha t})$, et de même $\exp(-tA^T) = O(e^{-\alpha t})$ car A^T et A ont même spectre, donc $V(t) = O(e^{-2\alpha t})$. Il en résulte que V est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (par passage aux coordonnées) et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = 0$.

En faisant tendre t vers $+\infty$ dans l'égalité du b), et en posant $W_\infty = \int_0^{+\infty} V(s) ds$, on obtient

$A^T W_\infty + W_\infty A = I_n$. Par unicité, on en déduit que $B = W_\infty$.

Soit $X \in E_n$, pour tout $t \geq 0$, $X^T W(t) X \geq 0$ donc par passage à la limite, $X^T B X \geq 0$, donc $B \in \mathcal{S}_n^+$, mais $\det B > 0$, donc $B \in \mathcal{S}_n^{++}$.

I.B.3 Preuve de l'unicité. Voir TD 12.7 ou:

On suppose que $B_1 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $B_2 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B_1^2 = B_2^2$.

B_1 et B_2 sont diagonalisables d'ap. le th. spectral:

$$D_1 = P_1^{-1} B_1 P_1 \quad \text{et} \quad D_2 = P_2^{-1} B_2 P_2, \quad \text{d'où}$$

$$D_1^2 = P_1^{-1} B_1^2 P_1 \quad \text{et} \quad D_2^2 = P_2^{-1} B_2^2 P_2.$$

$$\text{Or } B_1^2 = B_2^2, \text{ d'où: } P_1 \cdot D_1^2 \cdot P_1^{-1} = P_2 \cdot D_2^2 \cdot P_2^{-1},$$

$$\text{d'où: } \underline{D_1^2 \cdot P = P \cdot D_2^2}, \text{ où } P = P_1^{-1} \cdot P_2.$$

On en déduit que:

$$\forall (i, j), \quad \lambda_i^2 p_{ij} = p_{ij} p_j^2$$

en notant $P = (p_{ij})$, $D_1 = \text{diag}(\lambda_i)$ et $D_2 = \text{diag}(\mu_j)$.

On bien $p_{ij} = 0$,

ou bien $p_{ij} \neq 0$ et alors $\lambda_i^2 = \mu_j^2$, $\forall (i, j)$.

$$\text{d'où } \lambda_i = \mu_j \text{ (car } \lambda_i > 0 \text{ et } \mu_j > 0)$$

Dans les deux cas, $\lambda_i p_{ij} = p_{ij} \mu_j$.

D'où $D_1 P = P D_2$. Donc $B_1 = B_2$.