

Thème 39

Exercice 11

1) On note $(a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, m\}}$ les coefficients de A
 soit $i \in \{1, \dots, m\}$.

On sait que $A^{(i)}$ est symétrique positive.
 C'est.

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in M_{i,1}(\mathbb{R})$$

$$X^T A^{(i)} X = X^T \begin{pmatrix} \sum_{\ell=1}^i a_{1,\ell} x_\ell \\ \vdots \\ \sum_{\ell=1}^i a_{i,\ell} x_\ell \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\ell=1}^i x_\ell \left(\sum_{\ell=1}^i a_{\ell,\ell} x_\ell \right)$$

On

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sum_{\ell=1}^i a_{1,\ell} x_\ell \\ \vdots \\ \sum_{\ell=1}^i a_{m,\ell} x_\ell \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\ell=1}^i x_\ell \left(\sum_{\ell=1}^i a_{\ell,\ell} x_\ell \right)$$

$$= X^T A^{(i)} X$$

$$A \in S_m^{++}(\mathbb{R}), \text{ d'où } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} > 0$$

$$\text{Donc } \forall X \in M_{i,1}(\mathbb{R}), X^T A^{(i)} X > 0$$

$$\text{Donc } A^{(i)} \in S_i^{++}(\mathbb{R})$$

La matrice $A^{(i)}$ est symétrique : elle est donc diagonalisable

dans une base orthonormale. D'après le théorème spectral, soit $P \in O_i(\mathbb{R})$ tel que $P^T A^{(i)} P$ est diagonale.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_i)$ les valeurs propres de $A^{(i)}$, qui sont réelles, d'après le théorème spectral.

$$\det(P^T A^{(i)} P) = \prod_{k=1}^i \lambda_k$$

On $A^{(i)} \in S_+^{++}(\mathbb{R})$, d'où $\forall k \in [1, i], \lambda_k > 0$

car $\forall M \in S_+(\mathbb{R})$ $M \in S_+^{++}(\mathbb{R})$ ssi $\forall \lambda \in \text{Sp}(M), \lambda > 0$

d'où $\det(P^T A^{(i)} P) > 0$

Donc $\boxed{\forall i \in [1, n], \det(A^{(i)}) > 0}$ car le déterminant

est un invariant de similitude

on:

2)

Pour $n=1$, si A vérifie P_1 , alors

$$\det(A^{(1)}) > 0, \text{ or } \det(A^{(1)}) = \det(A) = (A)_{1,1}$$

La matrice symétrique A est donc diagonale et

son unique coefficient est strictement positif

d'après le théorème précédemment énoncé

$$\boxed{A \in S_+^{++}(\mathbb{R})}$$

Pour $n=2$: Si A vérifie P_2 , alors

on peut $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} \det(A^{(1)}) > 0 \\ \det(A) > 0 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} a > 0 \\ ac - b^2 > 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} a > 0 \\ ac > b^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \\ ac - b^2 > 0 \end{cases}$$

Où $\begin{cases} \text{tr}(A) = a+c > 0 \\ \det(A) > 0 \end{cases}$

Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres, essentiellement égales, de A puisque la matrice A est diagonalisable d'après le théorème spectral.

$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 > 0 \end{cases}$, car la trace et le déterminant sont des invariants de similitude

Où $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, car λ_1 et λ_2 sont propres de même signe

La encore, sachant $\forall M \in S_2(\mathbb{R})$, $M \in S_2^+(\mathbb{R}) \iff \lambda \in S_p(M), \lambda > 0$: de somme positive

Si $A \in S_2(\mathbb{R})$ vérifie P_2 , alors $A \in S_2^+(\mathbb{R})$

mi

3)

a) Si

$A \in S_n(\mathbb{R})$ et n'est pas définie positive :

Soit donc $\lambda \in S_p(A)$ telle que $\lambda \leq 0$

A vérifie P_{n+1} , d'où $\det(A) > 0$

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in S_p(A^{n+1})$ les valeurs propres de A :

~~On peut le même raisonnement que la question 1~~

~~$\det(A) = \prod_{\lambda \in S_p(A)} \lambda > 0$~~

Où $\lambda \neq 0$, d'où $\lambda < 0$

On $\lambda \in S_p(A)$ $\lambda < 0$

Par le même raisonnement que la question 1

$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i > 0$

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\lambda_i = \lambda$:

Donc $\lambda_i \neq 0$ et $\exists j \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \lambda_j < 0$

Soient u et v 2 vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_i et λ_j .

Si $\lambda_i \neq \lambda_j$, alors u et v sont linéairement indépendants

car $v \perp u$

Proposition IV.16

Les SEP sont en somme directe

Si $\lambda_i = \lambda_j$, alors $\dim(E_{\lambda_i}(A)) \geq 2$ et

on peut donc choisir (u, v) libre et orthogonale d'après l'algorithme de Gram-Schmidt.

A admet donc 2 vecteurs propres linéairement indépendants associés à des valeurs propres strictement négatives

b) Soit $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que la dernière composante de

$X = (p_1 u + p_2 v)$ soit nulle.

D'après la question précédente $(u, u + p_2 v) \neq 0$

De plus

$$(p_1 u + p_2 v)^T A (p_1 u + p_2 v) = p_1^2 \lambda_i u^T u + p_2^2 \lambda_j v^T v$$

car $p_2 p_1 v^T A u = p_2 p_1 \lambda_i v^T u = 0$, car $u \perp v$ d'après la question précédente

$$\text{Or } \begin{cases} p_1^2 u^T u > 0 \\ p_2^2 v^T v > 0 \end{cases} \quad \text{car } \begin{cases} p_1 \neq 0 \\ p_2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{et } \begin{cases} u \neq 0 \\ v \neq 0 \end{cases} \quad \text{car } u \text{ et } v \text{ sont des vecteurs propres}$$

$$\text{Donc } p_1^2 \lambda_i u^T u + p_2^2 \lambda_j v^T v < 0$$

$$\text{Donc } \exists x \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}) \quad x^T A x < 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists x' \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}), \quad x = \begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

D'où $x'^T A^{(m)} x' < 0$

On A vérifie $P_{m+1} \Rightarrow A^{(m)}$ vérifie P_m

On a supposé que toute matrice de $S_m(\mathbb{R})$ qui vérifie P_m est définie positive d'où $A^{(m)} \in S_m^{++}(\mathbb{R})$

D'où $x'^T A^{(m)} x' > 0$ - c'est absurde

$(\forall A \in S_m(\mathbb{R}), A \text{ vérifie } P_m \Leftrightarrow A \in S_m^{++}(\mathbb{R})) \Rightarrow (\forall A \in S_{m+1}(\mathbb{R}), A \text{ vérifie } P_{m+1} \Leftrightarrow A \in S_{m+1}^{++}(\mathbb{R}))$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\Phi_n : \forall A \in S_n(\mathbb{R}), A \text{ vérifie } P_n \Leftrightarrow A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

D'après la question 2, Φ_2 est vrai

D'après la question précédente et celle-ci

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Phi_n \Rightarrow \Phi_{n+1}$

Par principe de récurrence,

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall A \in S_n(\mathbb{R}), A \text{ vérifie } P_n \Leftrightarrow A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

4)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$

$\begin{cases} \det(A) = 0 \\ \det(A^{(1)}) = 0 \end{cases}$ car la matrice A est aléatoire

On A n'est pas positive

~~A car~~ L'équivalence est donc fautive