Thème n° 2

Algèbre linéaire

6 mars 2025

Objectif : Réviser l'algèbre linéaire ▷ **II** sans oublier la stabilité de l'orthogonal ▷ **XII§4** ni la continuité des applications linéaires ▷ **XI§8 & XI§9**. Et la réduction des endomorphismes ▷ **IV** sans oublier le théorème spectral ▷ **XII.20,21&22**.

A • Noyau, image et rang :

1. En dimension finie, savoir déterminer une base du noyau mais aussi de l'image. Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base d'un *ev* E et si f est une application linéaire sur E, alors $\mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n))$. Autrement dit : la famille $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est génératrice de l'image. Et on obtient une base de $\mathrm{Im}f$ en libérant cette famille. En prenant garde :
   — pour un endo. sur l'*ev* $E = \mathbb{K}_n[X]$, à ne pas confondre d'une part les vecteurs (qui sont des polynômes) qui forment une base de $\mathrm{Ker}(f)$ ou de $\mathrm{Im}(f)$, et les vecteurs-colonnes qui forment une base de $\mathrm{Ker}\left([f]_\mathcal{B}\right)$ ou de $\mathrm{Im}\left([f]_\mathcal{B}\right)$ ▷ **Colle2.3** ;
   — pour un endo. f sur l'*ev* $E = \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, à ne pas confondre la matrice de f (dans une base $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ de E) qui est une matrice $n^2 \times n^2$ et les matrices « mangées » par f qui sont des matrices $n \times n$ ▷ **TD2.13 & TD12.10** ;
2. Le théorème du rang résulte d'un isomorphisme ▷ **II.2**, il ne dit pas que noyau et image sont toujours supplémentaires ▷ **II.3** et il implique que bijective ⇔ surjective ⇔ injective en dimension finie si les *ev* de départ et d'arrivée ont même dimension.
3. Au sujet des itérés, réviser les noyaux emboîtés ▷ **TD2.12** mais aussi les limites d'une suite géométrique ▷ **exo2 du 31/01/2025 & DS5.4q.3b** ou d'une somme géométrique ▷ **annexeC.3** et encore les endomorphismes nilpotents ▷ **II.33&34, IV.25, TD11.9 & preuve du théo IV.37**.
4. Réviser les matrices de rang 1 ▷ **TD 2.4, TD 4.7, Colle 11.2** et celles de rang 2 ▷ **TD 4.14**.
5. Le noyau est aussi le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 : en particulier, un endomorphisme f est injectif *ssi* $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$, une matrice M est inversible *ssi* $0 \notin \mathrm{Sp}(M)$ ▷ **IV.13, TD 4.11, TD12.13q.2 & & DS5.4q.3b**. Et le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est l'ensemble des vecteurs invariants : l'axe d'une rotation, l'hyperplan d'une réflexion, le *sev* sur lequel on projette, etc

Exercice 5. À toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, on associe la fonction $u(f)$ définie par

$$u(f)(0) = f(0) \qquad \text{et} \qquad \forall x > 0,\ u(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

Montrer que u est un endomorphisme de l'*ev* $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Cet endomorphisme est-il injectif ? surjectif ? Déterminer l'ensemble $E_1(u)$ des vecteurs invariants par u. Quel est le spectre de u ?

B • Sommes ▷ **II§3**.

1. Deux *sev* F et G d'un *ev* E sont en somme directe :
   $\Longleftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$ (**) ;
   $\Longleftrightarrow \dim(F + G) = \dim F + \dim G$ (en dimension finie) (*) ;
   $\Longleftarrow F \perp G$ (si E est préhilbertien) ▷ **VIII.17**.
2. Deux *sev* F et G d'un *ev* E sont supplémentaires :
   $\Longleftrightarrow$ tt vecteur s'écrit, de manière unique, comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G (*) ;
   $\Longleftrightarrow F + G = E$ et $F \cap G = \{0_E\}$ (**) ;

$\iff F+G=E$ et $\dim(F+G)=\dim F+\dim G$ (en dimension finie) (*) ;

$\iff \dim F+\dim G=\dim E$ et $F\cap G=\{0_E\}$ (en dimension finie) (**) ;

$\iff$ ils sont les noyau et image d'un projecteur ;

$\Longleftarrow G=F^{\perp}$ (si E est préhilbertien et F est de dimension finie) ▷ **VIII.23**.

3. Les propriétés (*) se généralisent à plus de deux *sev*. Mais pas les propriétés (**) : des *sev* deux à deux en somme directe ne sont pas nécessairement en somme directe (pensez, dans $\mathbb{R}^2$, aux *sev* Vect(i), Vect(j) et Vect$(i+j)$). Par contre, des *sev* deux à deux orthogonaux sont en somme directe ▷ **VIII.14**.

   Enfin, se rappeler que $F\oplus G=F'\oplus G=E \not\Longrightarrow F=F'$ car un supplémentaire n'est pas unique.

   Par contre $F\overset{\perp}{\oplus}G=F'\overset{\perp}{\oplus}G=E \implies F=F'=G^{\perp}$ car le supplémentaire orthogonal est unique.

4. Le lemme des noyaux ▷ **II.35** permet de montrer que des *sev* sont en somme directe (c'est le cas des *sep* E_λ d'un endomorphisme ▷ **la seconde preuve de IV.16**) voire supplémentaires (c'est le cas des sous-espaces caractéristiques C_λ ▷ **IV.37&38)**.

C • Hyperplans :

— (en dimension finie ou infinie) H est un hyperplan de E *ssi* H est le noyau d'une forme linéaire non nulle *ssi* H est le supplémentaire d'une droite vectorielle ▷ **II.12**.

— (si l'*ev* E est muni d'une norme) tout hyperplan H est un fermé de E si E est de dimension finie ▷ **XI.53**. Si l'*ev* E est normé et de dimension infinie alors H est, ou bien fermé, ou bien dense dans E ▷ **TD11.12**. (Dans le même esprit : tout *sev* de dimension finie d'un *evn* est un fermé de E ▷ **annexeB.20**.)

— (si l'*ev* E est muni d'un produit scalaire) l'orthogonal d'une droite est toujours un hyperplan ▷ **VIII.27**. L'orthogonal d'un hyperplan est toujours une droite si E est de dimension finie ▷ **VIII.27**, mais pas toujours si E est de dimension infinie ▷ **TD 8.6 q.4**.

D • Avec un polynôme annulateur :

— on peut calculer l'inverse ▷ **II.26** ou les puissances ▷ **II.28** d'une matrice ;

— on peut étudier le spectre d'un endomorphisme car le spectre de f est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme P annulateur de f : $\lambda\in\mathrm{Sp}(A) \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} P(\lambda)=0$. Et $\lambda\in\mathrm{Sp}(A) \iff \chi_A(\lambda)=0 \iff \mu_A(\lambda)=0$ ▷ **revoir la prop. IV.30 et ses deux preuves**. En profiter pour relire la définition du polynôme minimal ▷ **II.30** et réviser ce qu'est un idéal ▷ **annexeA§3** et notamment l'idéal annulateur d'une matrice ▷ **II.32**.

E • Diagonaliser & trigonaliser :

1. Un vecteur propre n'est pas nul ▷ **IV.3** et ça peut servir ▷ **TD 12.2 q.1**, sauf à diviser par 0.

Exercice 6. Soient deux matrices carrées A et B telles que $AB-BA=B$. Montrer que B est nilpotente.

2. Le polynôme caractéristique fournit non seulement le spectre mais aussi un encadrement de la dimension de chaque *sep* ▷ **IV.15** et ça peut servir ▷ **TD 4.6**. Plus précisément : $1\le\dim E_\lambda\le m_\lambda=\dim C_\lambda$ ▷ **IV.37**.

3. Réviser les critères de diagonalisabilité :
   — deux conditions suffisantes ▷ **IV.18 &** le théorème spectral ▷ **XII.20,21&22** ;
   — cinq conditions nécessaires et suffisantes ▷ **IV.19&31**.

   Et les critères de trigonalisabilité : deux conditions nécessaires et suffisantes ▷ **IV.23&31**.

4. À noter que :
   — polynôme caractéristique de A scindé à racines simples $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ A diagonalisable
   — il existe un polynôme annulateur de A scindé à racines simples $\iff$ A diagonalisable
   — polynôme minimal de A scindé à racines simples $\iff \mu_A=\prod\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}A}(X-\lambda) \iff$ A diagonalisable
   — polynôme caractéristique de A scindé $\iff$ polynôme minimal de A scindé $\iff$ A trigonalisable

Exercice 7 (polynômes d'interpolation de Lagrange ▷ **TD ~~2.9~~** 2.11 et projecteurs spectraux ▷ **TD 8.8**).
Soient un $\mathbb{K}-ev$ E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$.

a) On suppose ici que f est diagonalisable et que $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sont ses $r \leq n$ valeurs propres distinctes deux à deux. Soit, pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$, le polynôme d'interpolation de Lagrange $L_i(X) = \displaystyle\prod_{j \neq i} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$.
Montrer que $p_i = L_i(f)$ est le projecteur sur le *sep* $E_{\lambda_i}(f)$. Parallèlement à quel *sev* ? Quels sont les endomorphismes $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} p_i$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i$ et, plus généralement, $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k p_i$, pour chaque $k \in \mathbb{N}$?

b) On suppose ici qu'il existe s endomorphismes $f_i \in \mathcal{L}(E)$ et s scalaires $\mu_i \in \mathbb{K}$ distincts deux à deux tels que : $\forall k \in \mathbb{N},\ f^k = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \mu_i^k f_i$. Montrer que f est diagonalisable.

c) On suppose ici que f admet n valeurs propres distinctes deux à deux. On appelle *commutant* de f et on note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f. Montrer que, si $g \in C(f)$, alors tout vecteur propre de f est aussi un vecteur propre de g. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$. Montrer que $C(f)$ est un *sev* de $\mathcal{L}(E)$; quelle est sa dimension ? ▷ **II.32**

5. Certaines relations entre trace, déterminant et valeurs propres peuvent se démontrer sans trigonaliser ▷ **IV.10** ou en trigonalisant ▷ **Kdo du 18/10/2024** (où il est question des moments d'une matrice, à rapprocher des moments d'une fonction ▷ **V.24** et des moments d'une v.a. ▷ **X.24&25**).

F • STABILITÉ (d'un *sev* par un endomorphisme) :

1. Si deux endomorphismes commutent, alors l'image et le noyau ▷ **II.16**, les *sep* ▷ **IV.35** et les sous-espaces caractéristiques de l'un sont stables par l'autre.
2. Si un *sev* F est stable par un endomorphisme u, alors :
   — on peut définir l'endomorphisme $u|_F$ induit par u sur F ;
   — le polynôme caractéristique de $u|_F$ divise celui de u ▷ **IV.36** ;
   — l'endo. $u|_F$ est diagonalisable si u est diagonalisable ▷ **IV.40&41** ;

   La diagonalisation simultanée de deux matrices ▷ **Kdo du 08/11/2024**, l'unicité de la décomposition de Dunford ▷ **exo 2 du Kdo 22/11/2024** et l'unicité de la racine carrée d'une matrice symétrique positive ▷ **TD 12.7** en sont des applications.

   Réviser l'exo ▷ **IV.34** qui utilise le théorème de Cayley & Hamilton et qui permet de prouver le théorème ▷ **XII.35&36**.
3. Si un *sev* F d'un espace euclidien est stable par u, alors son orthogonal $F^{\perp}$ aussi : c'est vrai si u est une isométrie vectorielle ou un endomorphisme autoadjoint ▷ **XII§4** ou plus généralement un endomorphisme normal ▷ **TD 12.11**.

G • Linéarité et continuité ▷ **XI§8 & XI§9**.

Si l'*evn* de départ n'est pas de dimension finie, alors une application linéaire n'est pas toujours continue ▷ **XI.38**. Si l'*ev* de départ est de dimension finie, alors une application linéaire ou multilinéaire est toujours continue.

Et ça peut servir ▷ **TD11.9q.2, DS5.4q.3b & annexe C**.

La continuité de l'application $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}),\ A \mapsto A^k$ peut se prouver en utilisant ▷ **XI.46** ou en composant

$$A \mapsto (A, A, \cdots, A) \quad \text{et} \quad (M_1, M_2, \cdots, M_k) \mapsto M_1 \cdot M_2 \cdots M_k$$

respectivement linéaires et multilinéaires sur un *ev* de dimension finie.

Mieux que continu, le déterminant est même de classe $\mathcal{C}^1$, donc différentiable ▷ **XV**.