Exercices d'oraux de mathématiques

Sélection d'énoncés rapportés d'oraux donnés aux concours et classés par thèmes

Les exercices suivants sont corrigés :

Louis P 46+CCP77 / Léandre 139+CCP2 / Louise 18+CCP4 / Matthieu 67+CCP71 / Victor C 131+CCP76 / Edwyn 1 // Lorca 9+CCP30 / Alan 122+CCP56 / Louis L 41+CCP6 / Félix 44 / Adrien D 51 / Alexander 138 // Louca 68+CCP73 / Oscar 26+CCP14/ Corentin 34+CCP103 / Hugo E 4+CCP98 / Arthur 88+CCP60 / Paul P 119 / Adrien F 84+CCP111 / Pia 25+CCP49 / Hugo L 24+CCP28 / Victor S 49+CCP32 / Raphaël 108+CCP108 / Gabrielle 27+CCP42 // Clément 77+CCP62 / Alex 73+CCP64 / Tom 81+CCP59 / Félix 11 / Adrien D 50+CCP96 / Alexander 55+CCP86 / Quentin 80+CCP66 / Mallory 73+CCP67 / Romann 23+CCP80 / Paul L 133+CCP68 / Iban 81+CCP38/ Paul M 89+CCP61 / Tomass 6+CCP38 // Anatole 37+35 / Loane 28+CCP17 / Victor C 48+CCP16 / Cyprien 130+CCP57 / Raphaël 137+93 / Léandre 136+CCP41 // Louca 105/ Gabrielle 16 / Victor S 60+CCP35 / Corentin 83 / Alan 12 / Oscar 78 //

1 Algèbre

1.1 Sous-espaces vectoriels & applications linéaires

1. RMS 132 1126 CCINP PSI 2021

Soient E un espace vectoriel de dimension 4 et u un endomorphisme de E. Montrer que :

(a) si $\mathrm{rg}(u) = 2$ et $u^2 = 0$, alors il existe une base dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(b) si $\mathrm{rg}(u) = 3$ et $u^4 = 0$, alors $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Im}(u^2)$ et il existe une base dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution. —

(a) De $u^2 = 0$, on déduit que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$. Et ils ont la même dimension car $\dim \mathrm{Ker}(u) = 4-2$ d'après le thèorème du rang. Soit (e_1, e_2) une base de $\mathrm{Ker}(u)$. Comme $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$, il existe $(e_3, e_4) \in E^2$ tel que $u(e_3) = e_1$ et $u(e_4) = e_2$. La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre car

$$\begin{aligned} \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 = 0_E \quad &\Longrightarrow \quad \alpha_3 e_1 + \alpha_4 e_2 = 0_E \text{ en appliquant } u \\ &\Longrightarrow \quad \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \text{ car } (e_1, e_2) \text{ est libre} \\ &\Longrightarrow \quad \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0_E \\ &\Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0. \end{aligned}$$

Cette famille libre est de cardinal 4, c'est donc une base. De plus, la matrice représentant u dans cette base est de la forme voulue.

(b) Montrons que $u^2 = 0$ est absurde : si $u^2 = 0$, alors $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$, d'où $3 = \mathrm{rg}(u) \leq \dim \mathrm{Ker}(u)$, ce qui est absurde car $\mathrm{rg}(u) + \dim \mathrm{Ker}(u) = \dim E = 4$ d'après le théorème du rang.

Montrons ensuite que $u^3 = 0$ est absurde : de $u^2 \neq 0$, on déduit qu'il existe un vecteur x tel que $u^2(x) \neq 0$. On vérifie que la famille $(u^2(x), u(x), x)$ est libre car $u^3 = 0$. Il suffit alors d'un vecteur y pour compléter la famille libre $(u^2(x), u(x))$ en une base $(y, u^2(x), u(x))$ de $\mathrm{Im}(u)$ car $3 = \mathrm{rg}(u)$. On vérifie que $(y, u^2(x), u(x), x)$ est alors une famille libre et donc une base de E car son cardinal est égal à la dimension de E. Et la matrice de u dans cette base est de la forme $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. De $3 = \mathrm{rg}(u)$, on déduit que $3 = \mathrm{rg}(N)$, d'où $a \neq 0$. Et, de $u^3 = 0$, on déduit que $N^3 = 0$, d'où $a^3 = 0$. C'est absurde.

Pour finir, de $u^3 \neq 0$, on déduit qu'il existe un vecteur x tel que $u^3(x) \neq 0$. On vérifie que la famille $(u^3(x), u^2(x), u(x), x)$ est libre car $u^4 = 0$. C'est donc une base de E car son cardinal est égal à la dimension de E. Dans cette base, la matrice M représentant u a la forme voulue : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ car $u^4 = 0$. D'où $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice représentant u^2. On en déduit que $\operatorname{Ker}(u^2) = \operatorname{Im}(u^2)$.

2. RMS 2012 275 X ESPCI PC, RMS 2013 305 X ESPCI PC, RMS 2013 869 Centrale PC

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi\colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AMB$. Calculer la trace de Φ.

3. RMS 2007 768 Centrale PSI

Soient E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $E = F \oplus G$ et on note p le projecteur sur F parallèlement à G et $q = \mathrm{id}_E - p$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que F est stable par f si et seulement si $q \circ f \circ p = 0$.

4. RMS 2016 969 CCP PC & RMS 2010 814 Centrale PSI

Soit $S\colon \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'application qui à f associe $S(f)\colon x \mapsto \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que, si $S(f) = 0$, alors f est périodique.

(b) L'application S est-elle injective ? surjective ?

(c) Soit $n \geq 2$. Montrer que S induit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[X]$, noté s.

(d) L'endomorphisme s est-il bijectif ? diagonalisable ?

Solution. —

(a) Comme f est continue, elle possède une primitive $F : x \mapsto \int_7^x f(t)\,dt$ et $S(f) : x \mapsto \frac{1}{2}F(x+1) - \frac{1}{2}F(x-1)$ est $\mathcal{C}^1$. De plus $S(f)'(x) = \frac{1}{2}F'(x+1) - \frac{1}{2}F'(x-1) = \frac{1}{2}\left[f(x+1) - f(x-1)\right]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si $S(f) = 0$, alors la fonction $S(f)$ est constante, d'où sa dérivée est nulle, donc $f(x+1) = f(x-1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc f est 2−périodique.

(b) On cherche deux contre-exemples. La fonction S n'est pas injective car la fonction $t \mapsto \sin(\pi t)$ (continue et non nulle) appartient à son noyau et elle n'est pas surjective car $x \mapsto |x|$ est continue mais pas $\mathcal{C}^1$, donc elle n'appartient pas à l'image.

(c) La fonction S est linéaire et pour $f_k(x) = x^k$ on trouve :

$$S(f_k)(x) = \frac{1}{2(k+1)}\left[(x+1)^{k+1} - (x-1)^{k+1}\right] = \frac{1}{2(k+1)}\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}\left[1 - (-1)^{k+1-i}\right]x^i = x^k + \cdots$$

On en déduit que $S(f_k)$ est un polynôme de degré $\leqslant k$. Par linéarité S induit bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(d) Le calcul fait en (c) donne que, dans la base canonique $\mathcal{B} = (f_0, \cdots, f_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, la matrice de s est triangulaire supérieure avec une diagonale de 1. On voit que $\det s = 1$ et on en déduit que s est bijectif.

L'endomorphisme s n'est pas diagonalisable car (par l'absurde), n'ayant que la valeur propre 1, il serait alors égal à $\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$; or $s(X^2) = X^2 + \frac{1}{3} \neq X^2$.

Autre méthode : Comme s est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie, son injectivité donnera sa bijectivité. Or si $f \in \operatorname{Ker} s$, alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) - f(x-1) = 0$ et le polynôme $P = f - f(0)$ admet une infinité de racines, les réels $2n$, $n \in \mathbb{N}$. Ce polynôme est donc nul, donc f est constant et $s(f) = 0$ donne alors $f = 0$.

5. RMS 2006 1043 CCP PSI

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g = E \iff \operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$.

Solution. — On suppose que $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g = E$. L'inclusion $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$ étant toujours vraie, il suffit de démontrer que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im}(g \circ f)$. Soit $y \in \operatorname{Im} g$. Il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. Par hypothèse, il existe $(x_1, x_2) \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$ tel que $x = x_1 + x_2$ et, comme $x_1 \in \operatorname{Im} f$, il existe $x_3 \in E$ tel que $x_1 = f(x_3)$. Alors $y = g(x) = g(f(x_3) + x_2) = g(f(x_3))$, puisque $x_2 \in \operatorname{Ker} g$), ce qui prouve que $y \in \operatorname{Im}(g \circ f)$.

Réciproquement, on suppose que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$. Soit $x \in E$. Alors $g(x) \in \operatorname{Im}(g \circ f)$ par hypothèse, donc il existe $y \in E$ tel que $g(x) = g(f(y))$, ou encore $g(x - f(y)) = 0$. On vient de montrer que $z := x - f(y) \in \operatorname{Ker} g$, et l'égalité $x = f(y) + z$ prouve que $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g = E$.

6. RMS 2014 639 Mines Ponts PSI

Soient E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $f^2 = 0$ si, et seulement si, il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = f$ et $g \circ f = 0$.

Solution. — On remarque classiquement que $f^2 = 0 \iff \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.

- Dans le sens $\Longleftarrow$: $f^2 = f \circ (g \circ f) \circ g = 0$.
- Dans l'autre sens : soit G un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ et g la projection sur G parallèlement à $\operatorname{Ker} f$. Tout vecteur $x \in E$ s'écrit $x_0 + x_1$, avec $(x_0, x_1) \in \operatorname{Ker} f \times G$. Alors $f(x) = f(x_0 + x_1) = f(x_1) = f(g(x))$ et comme $f(x) \in \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$, $g(f(x)) = 0_E$.

7. RMS 2016 324 X ESPCI PC

Mots-clés : caractérisation des matrices non inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det A = 0$ si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AB = BA = 0$.

8. RMS 2024 303 X MP MPI

Soient p un projecteur et u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que $p \circ u + u \circ p = u$. Montrer que $\operatorname{tr}(u) = 0$.

9. RMS 2024 930 Mines Ponts PSI

Soient un espace vectoriel E, un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ et un sous-espace vectoriel F stable par u. On suppose que u est nilpotent et que $E = F + \operatorname{Im}(u)$. Montrer que $E = F$.

Solution. — Soit un vecteur $x_0 \in E$. De la relation $E = F + \operatorname{Im}(u)$, on tire l'existence de $(x_1, y_0) \in E \times F$ tel que $x_0 = u(x_1) + y_0$. De même, il existe $(x_2, y_1) \in E \times F$ tel que $x_1 = u(x_2) + y_1$ et, par récurrence : pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $(x_{p+1}, y_p) \in E \times F$ tel que $x_p = u(x_{p+1}) + y_p$. Toujours par récurrence, $x_0 = y_0 + u(y_1) + u^2(y_2) + \cdots + u^{p-1}(y_{p-1}) + u^p(x_p)$ pour tout p. En particulier, on peut choisir p tel que $u^p = 0$ car l'endomorphisme u est nilpotent. Alors $x_0 = y_0 + u(y_1) + u^2(y_2) + \cdots + u^{p-1}(y_{p-1})$ est une somme de vecteurs de F car les vecteurs y_k appartiennent à F par construction et le *sev* F est stable par u. D'où $E \subset F$, donc $E = F$.

10. UPS 20240331

Mots-clés : commutant d'une matrice

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n$ l'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients complexes et $\mathcal{T}_n$ le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n$, on pose f_A l'endomorphisme défini sur $\mathcal{M}_n$ par $f_A(M) = AM - MA$.

(a) On suppose que $A \in \mathcal{T}_n$. Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{T}_n$, la matrice $f_A(M)$ est triangulaire supérieure stricte. En déduire que $\dim(\mathcal{T}_n \cap \operatorname{Ker} f_A) \geq n$.

(b) Soit une matrice quelconque $A \in \mathcal{M}_n$. Montrer que $\dim(\operatorname{Ker} f_A) \geq n$.

11. B2 Centrale

Mots-clés : commutant d'une matrice

Soient $n \geq 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(a) Soient $D = \operatorname{diag}(1, 2, \cdots, n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ M \mapsto MD - DM$. Montrer que $\operatorname{Im}(\varphi)$ est l'ensemble $\mathcal{N}_n$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à coefficients diagonaux tous nuls.

(b) Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K} - ev$ E de dimension n tel que, pour tout $x \in E$, $u(x)$ est colinéaire à x. Montrer que u est une homothétie.

(c) Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la trace est nulle est semblable à une matrice de $\mathcal{N}_n$.

(d) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\operatorname{tr}(A) = 0$ si, et seulement si, il existe $(U, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $A = UV - VU$.

Solution. —

(a) Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les éléments diagonaux de la matrice $\varphi(M)$ sont tous nuls, donc $\operatorname{Im}(\varphi) \subset \mathcal{N}_n$. Pour prouver l'égalité, il suffit de montrer l'égalité des dimensions des *sev* $\operatorname{Im}(\varphi)$ et $\mathcal{N}_n$.
D'une part, la famille $(E_{ij})_{i \neq j}$ est une base du sev $\mathcal{N}_n$, qui est donc de dimension $n^2 - n$. D'autre part, $M \in \operatorname{Ker}(\varphi) \iff MD = DM \iff \forall (i,j),\ i m_{ij} = j m_{ij} \iff \forall i \neq j,\ m_{ij} = 0$. D'où $\dim \operatorname{Ker}(\varphi) = n$ et, par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im}(\varphi) = n^2 - n$.

(b) Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E. Par hypothèse, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $\alpha_{e_i} \in \mathbb{K}$ tel que $u(e_i) = \alpha_{e_i} e_i$. De même, pour tout $i \neq j$, il existe $\alpha_{e_i+e_j} \in \mathbb{K}$ tel que $u(e_i + e_j) = \alpha_{e_i+e_j}(e_i + e_j)$. De $u(e_i) + u(e_j) = u(e_i + e_j)$, on déduit que $(\alpha_{e_i+e_j} - \alpha_{e_i})e_i + (\alpha_{e_i+e_j} - \alpha_{e_j})e_j = 0_E$. D'où $\alpha_{e_i+e_j} - \alpha_{e_i} = \alpha_{e_i+e_j} - \alpha_{e_j} = 0_{\mathbb{K}}$ car la famille (e_i, e_j) est libre. D'où $\alpha_{e_i} = \alpha_{e_j}$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_{e_i} = \lambda$. Donc $u(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E$ par linéarité.

(c) La propriété est vérifiée si $n = 1$. On la prouve ensuite par récurrence, en la supposant vraie à un rang n. Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ représentant un endomorphisme u dans une base $\mathcal{B}$ d'un ev E : ou bien A représente une homothétie, alors $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ A = \lambda I_{n+1}$ et la propriété est vraie. Ou bien il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x))$ est libre, ce qui permet de la compléter en une base $\mathcal{B}' = (x, u(x), e_3, \cdots, e_n)$ de E dans laquelle l'endomorphisme u est représenté par une matrice semblable A' semblable à A, de la forme $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où le bloc C est la colonne $(1\,0 \cdots 0)^T$. Le bloc

$D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de trace nulle car $0 = \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A') = \operatorname{tr}(D)$, on peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence : $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ P^{-1}DP \in \mathcal{N}_n$. D'où $A' = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & PNP^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & BP \\ P^{-1}C & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$ est semblable à une matrice de $\mathcal{N}_{n+1}$, et donc A aussi, ce qui achève la récurrence.

(d) Si $A = UV - VU$, alors $\operatorname{tr}(A) = 0$ car $\operatorname{tr}(UV) = \operatorname{tr}(VU)$. Réciproquement : si $\operatorname{tr}(A) = 0$, alors A est semblable à une matrice de $\mathcal{N}_n$ d'après c/ qui est de la forme $MD - DM$ d'après a/. Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P(MD - DM)P^{-1} = UV - VU$ en notant $U = PMP^{-1}$ et $V = PDP^{-1}$.

12. RMS 2025 535 Mines-Ponts MP-MPI

Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice non nulle et non inversible. Montrer que :

(a) il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\operatorname{Im}(A^p)$ et $\operatorname{Ker}(A^p)$ sont supplémentaires ;

(b) il existe $r \in [\![1, n-1]\!]$, $B \in GL_r(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{C})$ nilpotente tels que A est semblable à $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$.

SOLUTION. —

(a) $\triangleright$ **exercice 12 du TD 2**

(b) La matrice A représente un endo f dans une base d'un $\mathbb{C}-$ev E de dimension n. La somme directe $\operatorname{Im}(f^p) \oplus \operatorname{Ker}(f^p) = E$ de la question précédente est adaptée. Les *sev* $\operatorname{Im}(f^p)$ et $\operatorname{Ker}(f^p)$ sont stables f car les endo f et f^p commutent.
D'une part, l'endomorphisme $g : \operatorname{Im}(f^p) \to \operatorname{Im}(f^p),\ x \mapsto f(x)$ induit par f sur le *sev* stable $\operatorname{Im}(f^p)$ est bijectif car il est injectif. En effet, soit $x \in \operatorname{Ker}(g)$. Alors $g(x) = 0_E$, d'où $f^p(x) = 0_E$, d'où $x \in \operatorname{Ker}(f^p)$. Or x appartient aussi à $\operatorname{Im}(f^p)$ par construction. Et ces deux *sev* sont en somme directe d'après la question prcédente, donc $x = 0_E$.
D'autre part, l'endomorphisme $h : \operatorname{Ker}(f^p) \to \operatorname{Ker}(f^p),\ x \mapsto f(x)$ induit par f sur le *sev* stable $\operatorname{Ker}(f^p)$ est nilpotent car $f^p(x) = 0_E$ car $x \in \operatorname{Ker}(f^p)$ par construction.
En concaténant une base $\mathcal{B}_1$ de $\operatorname{Im}(f^p)$ et une base $\mathcal{B}_2$ de $\operatorname{Ker}(f^p)$, on obtient une base de E d'après la question précédente. Dans cette base, la matrice $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ de l'endo f est diagonale par blocs, B est inversible car c'est la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_1$ et N est nilpotente car c'est la matrice de h dans la base $\mathcal{B}_2$.

1.2 Réduction

13. RMS 132 1003 Centrale PSI 2021

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que toute matrice non nulle de F soit inversible.

(a) Ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que, si les matrices A et B sont inversibles, alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha A - B$ n'est pas inversible. Qu'en déduire sur la dimension de F ?

(b) Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Examiner le cas où n est impair. Donner un exemple où la dimension de F est 2. Montrer que, si n est pair, alors $\dim F \leq n$.

14. RMS 2012 1319 CCP PC

Mots-clés : polynômes annulateurs

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f \circ f$ est un projecteur.
Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f^3 = f$.

15. RMS 2014 903b Centrale PSI

Mots-clés : polynômes annulateurs

Soit $M = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer le polynôme minimal de la matrice M.

(b) Montrer qu'il n'existe pas de matrice $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ semblable à M.

16. A1 CCP MP 2018

Mots-clés : polynômes annulateurs

Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T - I_n = 0$.

(a) Montrer que la matrice M est diagonalisable.

(b) Montrer que M est inversible si, et seulement si, 1 n'est pas une valeur propre de M.

SOLUTION. —

(a) De $M^2 + M^T - I_n = 0$, on déduit :
— en élevant $M^T = I_n - M^2$ au carré que $(M^T)^2 = I_n - 2M^2 + M^4$;
— en transposant que $(M^T)^2 = I_n - M$.
En comparant, il vient que $M^4 - 2M^2 + M = 0$. Le polynôme $P = X^4 - 2X^2 + X = X(X-1)(X^2+X-1) = X(X-1)(X - \frac{-1+\sqrt{5}}{2})(X - \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$ est donc annulateur de la matrice M. Or ce polynôme P est scindé à racines simples, donc la matrice M est diagonalisable.

(b) Le spectre de M est inclus dans l'ensemble $\{0; 1; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\}$ des racines du polynôme annulateur P. La trace de la matrice M nous renseigne aussi sur ses valeurs propres. De $M^2 + M^T - I_n = 0$, on déduit que $\mathrm{Tr}(M^2) + \mathrm{Tr}(M^T) - \mathrm{Tr}(I_n) = 0$ par linéarité de la trace. De plus, $\mathrm{Tr}(M^T) = \mathrm{Tr}(M)$, d'où $\mathrm{Tr}(M^2) + \mathrm{Tr}(M) - \mathrm{Tr}(I_n) = 0$, donc $\mathrm{Tr}(M^2 + M - I_n) = 0$.
Or la matrice M est diagonalisable et la trace est un invariant de similitude, d'où :

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^2 + \lambda_i - 1) = d_0 \times (0^2 + 0 - 1) + d_1 \times (1^2 + 1 - 1)$$

car $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ sont des racines de $\lambda^2 + \lambda - 1$. On en déduit que les dimensions d_0 de $SEP(0)$ et d_1 de $SEP(1)$ sont égales.
Enfin, une matrice est inversible *ssi* 0 n'appartient pas à son spectre. Donc M est inversible *ssi* $d_0 = 0$ *ssi* $d_1 = 0$.

17. RMS 2011 1128 CCP PC

Mots-clés : polynômes annulateurs

(a) On définit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = 2M + {}^{\mathrm{t}}M$. Déterminer un polynôme annulateur de φ. Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

(b) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\varphi_{a,b} : M \mapsto aM + b\,{}^{\mathrm{t}}M$. Montrer que $\varphi_{a,b}$ est inversible si, et seulement si, $a^2 \neq b^2$.

18. RMS 2016 757 Centrale PSI

Mots-clés : symétries qui anticommutent

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, g des endomorphismes de E tels que $f^2 = g^2 = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

(a) Montrer que la dimension de E est paire.

(b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

SOLUTION. —

(a) L'endomorphisme f est une symétrie, d'où $E = E_1(f) \oplus E_{-1}(f)$ est la somme directe des deux sous-espaces vectoriels $E_1(f) = \mathrm{Ker}(1\,\mathrm{id}_E - f)$ et $E_{-1}(f) = \mathrm{Ker}(-1\,\mathrm{id}_E - f)$.
Pour tout $x \in E_1(f)$, on a $f(x) = 1x$ et, parce que f et g anticommutent, $0_E = f \circ g(x) + g \circ f(x) = f \circ g(x) + g(x)$, d'où $f(g(x)) = -g(x)$. D'où $g(x) \in E_{-1}(f)$, donc $g(E_1(f)) \subset E_{-1}(f)$ et, par suite, $\dim g(E_1(f)) \leq \dim E_{-1}(f)$. Or g est bijective (car $g^2 = \mathrm{id}_E$ parce que g est une symétrie), d'où $\dim g(E_1(f)) = \dim E_1(f)$. On en déduit que $\dim(E_{-1}(f)) \geqslant \dim(E_1(f))$.
De même pour $x \in E_{-1}(f)$ on a $f \circ g(x) - g(x) = 0$ donc $g(E_{-1}(f)) \subset E_1(f)$, et l'on conclut $\dim(E_{-1}(f)) \leqslant \dim(E_1(f))$. D'où l'égalité des dimensions des deux sous-espaces vectoriels $E_1(f)$ et $E_{-1}(f)$, et comme ces deux sous-espaces sont supplémentaires, il vient que $\dim(E) = \dim(E_{-1}(f)) + \dim(E_1(f))$ est paire.
De plus, g induit un isomorphisme de $E_1(f)$ sur $E_{-1}(f)$ (resp. de $E_{-1}(f)$ sur $E_1(f)$).

(b) Soit $n = \dim(E_1(f)) = \dim(E_{-1}(f))$. On fixe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $E_1(f)$. Comme g induit un isomorphisme de $E_1(f)$ sur $E_{-1}(f)$, les vecteurs $e_{n+1} = g(e_1), \ldots, e_{2n} = g(e_n)$ forment une base de $E_{-1}(f)$.
Dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{2n})$, la matrice de f est alors par construction

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}.$$

Les égalités $e_{n+1} = g(e_1), \ldots, e_{2n} = g(e_n)$ donnent $g(e_{n+1}) = g^2(e_1) = e_1, \ldots, g(e_{2n}) = g^2(e_n) = e_n$ car $g^2 = \mathrm{id}_E$, donc la matrice de g dans $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

19. RMS 2016 472 Mines Ponts PSI

Mots-clés : racine carrée de la dérivation

On note E l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(a) Soient E_1 le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions sinus et cosinus et $\phi_1 \colon f \in E_1 \mapsto f' \in E_1$. Montrer qu'il existe un endomorphisme u de E_1 tel que $u \circ u = \phi_1$.

(b) Soit $\phi \colon f \in E \mapsto f' \in E$. Quel est le spectre de ϕ ? Existe-t-il un endomorphisme v de E tel que $v \circ v = \phi$?

20. RMS 2013 585 Mines Ponts PSI, RMS 2013 332 X ESPCI PC, RMS 2016 905 TPE PSI

Mots-clés : valeur propre commune

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et χ_A, χ_B leurs polynômes caractéristiques respectifs.

(a) Montrer que : si A et B ont une valeur propre commune, alors il existe U et V non nuls dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tels que $AU\,{}^{\mathrm{t}}V = U\,{}^{\mathrm{t}}V\,B$.

(b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que : si $AM = MB$, alors $\chi_B(A)M = 0$.

(c) À quelle condition, nécessaire et suffisante, les matrices A et B ont-elles une valeur propre commune ?

21. RMS 2014 1198 TPE PSI

(a) Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}$ et $u \colon P \in \mathbb{C}_d[X] \mapsto (X-a)P' \in \mathbb{C}_d[X]$. Trouver les éléments propres de u.

(b) En déduire l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ divisibles par leur dérivée.

22. RMS 2007 934 CCP PC

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_n$ ne soit pas inversible.

(a) Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = iX$ et $X \neq 0$.

(b) Montrer qu'il existe U et V dans $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ libres tels que $AU = -V$ et $AV = U$.

23. RMS 2016 885 ENSAM PSI

Mots-clés : matrice circulante

Soient

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & & a_2 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Quel est son spectre ?

(b) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Quel est son spectre ?

Solution. —

(a) (Si on remarque que $J^n = I_n$, alors on peut d'emblée affirmer que la matrice J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car le polynôme $X^n - 1$ est annulateur, scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$.) Sinon, on peut reconnaître une matrice compagnon et on effectue $L_1 \leftarrow L_1 + zL_2 + \cdots + z^{n-1}L_n$ pour calculer

$$\chi_J(z) = \begin{vmatrix} z & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & z & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & z^n - 1 \\ -1 & z & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & z \end{vmatrix} = z^n - 1$$

en développant selon L_1.

La matrice J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car χ_J possède n racines distinctes deux à deux, à savoir les racines $n-$ièmes de l'unité : $\mathrm{e}^{ik2\pi/n}$, avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.

(b) La matrice J^k est obtenue à partir de J en décalant les deux rangées de 1 de $k-1$ crans vers le bas.
Donc $P(J) = A$ si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$.
Les valeurs propres de A sont les $P(\omega)$ où $\omega \in \mathbb{U}_n$ et la matrice A est diagonalisable car les vecteurs propres de J sont aussi des vecteurs propres de A, or les vecteurs propres de J forment une base.

24. RMS 2010 1043 Petites Mines PC

Soient un entier $n \geq 2$, un réel m et la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = 1$ si $(i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n-1\}$ et $a_{i,n} = m$ si $1 \leqslant i \leqslant n$.

(a) On suppose que $m \neq 1-n$. Montrer que A est diagonalisable.

(b) On suppose que $m = 1-n$. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ dont tous les coefficients sont nuls excepté $b_{1,2} = 1$.

Solution. —

(a) Les colonnes de A étant proportionnelles à la première et non toutes nulles, A est de rang 1, donc zéro est valeur propre et $\dim SEP(0) = n-1$. De plus $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (n-1+m) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, or $n-1+m \neq 0$, d'où $\lambda = n-1+m$ est une valeur propre non nulle. D'où $\dim SEP(0) + \dim SEP(\lambda) = n$, donc A est diagonalisable.
Autre méthode — On calcule $A^2 = [(n-1)+m]\,A$, ce qui révèle que $P(X) = X \cdot (X - [(n-1)+m])$ est un polynôme annulateur de A, scindé à racines simples car $(n-1)+m \neq 0$ par hypothèse. Donc la matrice A est diagonalisable car une matrice est diagonalisable *ssi* elle possède un polynôme annulateur à racines simples.

(b) On note u l'endomorphisme canoniquement associé à A, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On remarque que $\operatorname{Im} u$ est la droite engendrée par $e'_1 = e_1 + \cdots + e_n$, et que $u(e'_1) = 0$ car $n-1+m = 0$, donc que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$, qui est de dimension $n-1$ d'après la question (a).
On pose alors $e'_2 = e_2$, de sorte que $u(e'_2) = e'_1 \neq 0$, et le théorème de la base incomplète assure que l'on peut trouver des vecteurs $e'_3, \dots, e'_n$ pour compléter e'_1 et former une base $(e'_1, e'_3, \dots, e'_n)$ de $\operatorname{Ker} u$. Comme $e'_2 \notin \operatorname{Ker} u$, la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, et la matrice de u sur $\mathcal{B}'$ est B, donc A est bien semblable à B.

25. RMS 2016 904 CCEM PSI

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit M une matrice carrée dont la première ligne est $(a, 0, \dots, 0)$ la deuxième $(1, \dots, 1)$, et toutes les autres $(1, 0, \dots, 0)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a pour que M soit diagonalisable.

Solution. — On a (le déterminant étant triangulaire par blocs)

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \chi_M = \begin{vmatrix} X-a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & X-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & X & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & 0 & 0 & \dots & X \end{vmatrix} = (X-a)(X-1)X^{n-2}.$$

La matrice M est de rang 2 donc $\dim E_0(M) = n-2$.

— Si $a \neq 0$ et $a \neq 1$: les valeurs propres a et 1 sont simples donc la dimension des espaces propres est 1 et $\dim E_0(M) = n-2$, chaque espace propre a pour dimension la multiplicité de la valeur propre donc M est diagonalisable.
— Si $a = 0$: la valeur propre 0 est d'ordre $n-1$ et $\dim E_0(M) = n-2$, l'espace propre n'a pas pour dimension la multiplicité de la valeur propre donc M n'est pas diagonalisable.
— Si $a = 1$: la valeur propre 1 est d'ordre 2, mais

$$I - M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang $n-1$ donc $\dim E_1(M) = 1$; l'espace propre n'a pas pour dimension la multiplicité de la valeur propre donc M n'est pas diagonalisable.

26. RMS 2014 1331 TPE PC

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\Phi_A \colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $\Phi_A = 0$.

(b) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$, comparer $\Phi_{P(A)}$ et $P(\Phi_A)$.

(c) Montrer que Φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Solution. —

(a) L'application Φ_A va de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même, et sa linéarité résulte de la bilinéarité du produit matriciel, c'est donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Si $\Phi_A = 0$, alors $\Phi_A(I_n) = AI_n = A = 0$. Réciproquement, il est clair que $A = 0 \implies \Phi_A = 0$.

(b) Une récurrence donne $(\Phi_A)^k = \Phi_{A^k}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, et on constate que $\Phi_{\lambda A + \mu B} = \lambda \Phi_A + \mu \Phi_B$ pour tous $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
En combinant les deux résultats, on obtient

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \forall P \in \mathbb{C}[X], \quad \Phi_{P(A)} = P(\Phi_A).$$

(c) Si A est diagonalisable, alors il existe un polynôme scindé à racines simples $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A) = 0$. On déduit de la question précédente que $P(\Phi_A) = \Phi_{P(A)} = \Phi_0 = 0$, donc que Φ_A est diagonalisable.
Réciproquement, si Φ_A est diagonalisable, alors il existe un polynôme scindé à racines simples $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\Phi_A) = 0$. On en déduit que $\Phi_{P(A)} = 0$, donc que $P(A) = 0$ en vertu de la question (a), donc que A est diagonalisable.

27. RMS 2014 1183 CCP PSI, RMS 2016 903 CCP PSI

L'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui envoie $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix}$ est-il diagonalisable ?

Solution. — *Première méthode*. On remarque que $\phi^4 = \mathrm{id}$. Le polynôme $X^4 - 1$ est annulateur et ses racines réelles sont -1 et $+1$. Comme $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\phi) \subset \{-1; +1\}$, si ϕ était diagonalisable sur $\mathbb{R}$, on aurait $\phi^2 = \mathrm{id}$, ce qui n'est pas le cas.
Deuxième méthode. La matrice de φ dans la base canonique $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est $\chi_\varphi = X^4 - 1$ qui n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc φ n'est pas diagonalisable.

28. RMS 2013 970 TPE EIVP PSI

Discuter, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la diagonalisabilité et la trigonalisabilité en fonction du paramètre réel a de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -a & a \end{pmatrix}$.

Solution. — Le polynôme caractéristique de A vaut

$$\chi_A(x) = (x - 1)(x^2 - (a - 1)x + 1),$$

et le discriminant de $x^2 - (a - 1)x + 1$ vaut $\Delta = a^2 - 2a - 3 = (a + 1)(a - 3)$. On en déduit que

— Si $-1 < a < 3$, χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc A n'est ni trigonalisable ni diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

— Sinon, χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, ses valeurs propres sont 1 et λ_2, λ_3 et A est au moins trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
  - si $a = -1$, alors $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ et $A + I_3$ est de rang 2 donc $\dim \mathrm{Ker}(A + I_3) = 1 < 2$ et A est seulement trigonalisable.
  - si $a = 3$, alors $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, d'où A n'ayant qu'une valeur propre et n'étant pas l'identité, est seulement trigonalisable.
  - si $a \neq -1$ et $a \neq 3$, alors $\lambda_2 \neq \lambda_3$. Comme $\lambda_2 \lambda_3 = 1$, elles sont nécessairement distinctes de 1. A admet donc 3 valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable.

Conclusion : si $a \in]-1, 3[$, A n'est pas trigonalisable, si $a = -1$ ou 3, A est trigonalisable mais pas diagonalisable et si $a < -1$ ou $a > 3$, A est diagonalisable.

29. RMS 2011 1079 CCP PSI, RMS 2013 648 Mines Ponts PC, RMS 2014 1225 CCP PSI, RMS 2016 919 ENSEA PSI

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M\,{}^{\mathrm{t}}M\,M = I_n$. Montrer que M est symétrique. Déterminer M.

30. RMS 2016 898 CCP PSI

Mots-clés : hyperplan stable

(a) Soient H un hyperplan d'un $\mathbb{C}$–espace vectoriel E de dimension finie, et u un endomorphisme de E. Montrer que $u(H) \subset H \iff \exists \lambda \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(u - \lambda\,\mathrm{id}) \subset H$.

(b) Trouver tous les sous-espaces stables par l'endomorphisme u représenté dans une base B par

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

31. RMS 2015 686 Mines Ponts PC

Mots-clés : hyperplan stable

Soient $n \geqslant 2$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ non nulle et $H = \mathrm{Ker}\,\Phi$.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que f stabilise H si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi \circ f = \lambda \Phi$.

32. RMS 2024 65 ENS MP MPI

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M = (m_{ij}) \in \mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice d'une réflexion et $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On pose $B = M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

Montrer que $\chi_B(1) = \chi_A(0) \cdot \chi_A(1) \cdot (1 - m_{11})$.

1.3 Algèbre bilinéaire

33. RMS 2014 659 Mines Ponts PSI

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver $\inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ (\mathrm{tr}\,A)^2 \leqslant \lambda\,\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}A\,A)\}$.

(b) Trouver $\inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+,\ \forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \det A \leqslant \lambda\,\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}A\,A)\}$.

34. RMS 2014 913 Centrale PSI

(a) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 P(t)\ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^1 P(t)\ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi P(t)Q(t)\sin t\,\mathrm{d}t$.

Solution. —

(a) $\int_0^1 \ln t\,dt$ converge et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 t^k \ln t\,dt$ converge aussi car $t^k \ln t = o(\ln t)$ $(t \to 0^+)$. Par linéarité, l'intégrale $\int_0^1 P(t)\ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

(b) On vérifie que l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définie par $\langle P|Q \rangle = \int_0^\pi P(t)Q(t)\sin t\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$: elle est bien symétrique et bilinéaire. Elle est aussi positive car $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \int_0^\pi P^2(t)\sin(t)\,dt \geq 0$ car $\forall t \in [0,\pi],\ P^2(t)\sin(t) \geq 0$. Enfin elle est définie car

$$\begin{aligned} \int_0^\pi P^2(t)\sin(t)\,dt = 0 \quad &\implies \quad \forall t \in [0,\pi],\ P^2(t)\sin(t) = 0 \text{ car la fonction } t \mapsto P^2(t)\sin(t) \text{ est continue et positive} \\ &\implies \quad \forall t \in]0,\pi[,\ P(t) = 0 \text{ car } \forall t \in]0,\pi[,\ \sin(t) \neq 0 \\ &\implies \quad P = 0 \text{ car le polynôme } P \text{ a une infinité de racines.} \end{aligned}$$

L'application $P \mapsto \int_0^1 P(t)\ln(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie d'après (a) et est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, qui est un espace vectoriel de dimension finie. Or toute forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ est, d'après le théorème de représentation de Riesz, de la forme $P \mapsto \langle P|Q \rangle$, pour un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, d'où le résultat.

35. RMS 2006 CCP PC, RMS 2010 1055 Télécom Sud Paris PC

Soient $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, p un projecteur orthogonal de rang r et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Montrer que $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = r$.

Solution. —

On note $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de p sur la base e : $\|p(e_i)\|^2 = \langle p(e_i), e_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^n a_{i,j} e_j, e_i \rangle = a_{i,i}$ car la base e est orthonormale, donc

$$\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^n a_{i,i} = \mathrm{tr}(A) = r,$$

car on sait que le rang d'un projecteur est égal à sa trace.

36. RMS 2011 1126 CCP PC

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, H_1 et H_2 deux hyperplans distincts, e_1 et e_2 deux vecteurs unitaires respectivement orthogonaux à H_1 et H_2. On pose

$$s_1\colon x \mapsto x - 2\langle x, e_1\rangle e_1 \quad \text{et} \quad s_2\colon x \mapsto x - 2\langle x, e_2\rangle e_2.$$

(a) Vérifier que le plan $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ est stable par $s_2 \circ s_1$.

(b) Montrer que $x \in E$ est fixe par $s_2 \circ s_1$ si et seulement si $x \in H_1 \cap H_2$.

37. RMS 2016 761 Centrale PSI

Soient p et q deux projections orthogonales définies sur un espace euclidien E. Soit $u = p + q$.

(a) Soit x un vecteur de norme 1. Encadrer $\langle x \mid p(x)\rangle$ et $\langle x \mid q(x)\rangle$. En déduire que $\mathrm{Sp}(u) \subset [0, 2]$.

(b) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

(c) Déterminer $\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id})$.

Solution. —

(a) (Faire un dessin.) Pour tout $x \in E$ unitaire, $\langle x \mid p(x)\rangle = \|p(x)\|^2 \leq \|x\|^2$, d'où $\langle x \mid p(x)\rangle \in [\,0\,;1\,]$ et, de même, $\langle x|q(x)\rangle \in [\,0\,;1\,]$

En particulier si λ est valeur propre de u et si x est un vecteur propre unitaire associé :

$$\lambda = \langle x \mid u(x)\rangle = \langle x \mid p(x)\rangle + \langle x \mid q(x)\rangle \in [\,0\,;2\,].$$

(b) Si $x \in E_0(u)$, on a $0 = \langle x \mid u(x)\rangle = \langle x \mid p(x)\rangle + \langle x \mid q(x)\rangle$ avec $\langle x \mid p(x)\rangle \geqslant 0$ et $\langle x \mid q(x)\rangle \geqslant 0$, donc nécessairement $\langle x \mid p(x)\rangle = \langle x \mid q(x)\rangle = 0$, ce qui prouve $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$. Réciproquement $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(u)$, d'où l'égalité.

(c) On remplace p et q par $\mathrm{id} - p$ et $\mathrm{id} - q$, qui sont aussi des projections orthogonales. Donc $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id}) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$.

38. RMS 2008 975 CCP PSI, RMS 2015 715 Mines Ponts PC, RMS 2015 1033, TPE PC, RMS 2016 558 Mines Ponts PC

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\left| \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \right| \leqslant n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n^{3/2}.$$

39. RMS 2009 1027 Centrale PC

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien.

(a) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint tel que $\langle g(z), z\rangle = 0$ pour tout $z \in E$. Montrer que $g = 0$.

(b) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint tel que $\langle g(z), z\rangle = \|g(z)\|^2$ pour tout $z \in E$. Montrer que g est un projecteur.

40. RMS 2013 987 CCP PSI

Mots-clés : valeurs propres de la partie symétrique d'une matrice

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = \frac{1}{2}(A + {}^{\mathrm{t}}A)$. On note $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ le spectre ordonné par ordre croissant de S. Si μ est une valeur propre réelle de A, montrer que $\lambda_1 \leqslant \mu \leqslant \lambda_n$.

41. OdT 2013 19 149 TPE PSI

Mots-clés : matrice symétrique semblable à sa diagonale

Soit S symétrique réelle et D diagonale dont les coefficients sont ceux de la diagonale de S. On suppose S et D semblables. Calculer $\mathrm{tr}(S^2)$ de deux manières et en déduire que $S = D$.

Solution. — On note $S = (s_{i,j})$. Comme S et D sont semblables, S^2 et D^2 sont semblables et donc $\mathrm{tr}(S^2) = \mathrm{tr}(D^2) = \sum_{k=1}^n s_{k,k}^2$ car D et S ont les mêmes éléments diagonaux. Par ailleurs, S étant symétrique, $\mathrm{tr}(S^2) = \mathrm{tr}(S^T S) = \sum_{j,k} s_{j,k}^2$ (c'est la formule du produit scalaire canonique qui nous le dit). Par identification, on obtient $\sum_j \sum_{k \neq j} s_{j,k}^2 = 0$. Or $s_{j,k}^2 \geqslant 0$, donc pour tout $k \neq j$, $s_{j,k} = 0$, i.e. $S = D$.

42. RMS 2010 1028 TPE PSI

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Écrire la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle π et d'axe dirigé par le vecteur (a, b, c).

43. RMS 2014 180 ENS PC

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on note $\mathcal{S}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $\Phi\colon (t, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{S} \mapsto e^{tA} X_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est bijective.

44. RMS 2024 314 X MP MPI

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien E. Montrer que :

(a) l'endomorphisme $p \circ q \circ p$ est autoadjoint positif ;

(b) $E = \operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q + (\operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} p)$;

(c) l'endomorphisme $p \circ q$ est diagonalisable ;

(d) le spectre de $p \circ q$ est inclus dans $[0, 1]$.

Solution. —

(a) Les projecteurs p et q sont autoadjoints (car orthogonaux), d'où $(p \circ q \circ p)^* = p^* \circ q^* \circ p^* = p \circ q \circ p$ et, pour tout vecteur $x \in E$, $\langle p \circ q \circ p(x) | x \rangle = \langle q \circ p(x) | p^*(x) \rangle = \langle q(y) | y \rangle$ en notant $y = p(x) = p^*(x)$. Or $\langle q(y) | y \rangle = \|q(y)\|_2^2$ car $y - q(y) \perp q(y)$. D'où $\langle p \circ q \circ p(x) | x \rangle \geq 0$. Donc $p \circ q \circ p \in S^+(E)$.

(b) Pour tous *sev* F et G, $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$. En particulier, si $F = \operatorname{Im} p$ et $G = \operatorname{Ker} q$, alors $(\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q)^\perp = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q$ car $F^\perp = \operatorname{Ker} p$ et $G^\perp = \operatorname{Im} q$.

(c) Le *sev* $\operatorname{Im} p$ est stable par $p \circ q$ et $\forall x \in \operatorname{Im} p$, $p \circ q(x) = p \circ q \circ p(x)$ car $p^2 = p$. Or l'endomorphisme $p \circ q \circ p$ est diagonalisable car autoadjoint d'après la première question. Sa restriction au *sev* stable $\operatorname{Im} p$ l'est donc aussi
▷ **proposition IV.40**. Il existe ainsi une base de $\operatorname{Im} p$ formée de vecteurs propres de $p \circ q$. D'après la deuxième question, on peut compléter cette base de $\operatorname{Im} p$ en une base de E en y adjoignant de nouveaux vecteurs pris dans le *sev* $\operatorname{Ker} q + (\operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} p)$. Or ces nouveaux vecteurs sont tous des vecteurs propres de $p \circ q$ associés à la valeur propre 0. On obtient ainsi une base de l'*ev* E formée de vecteurs propres de $p \circ q$, ce qui prouve que $p \circ q$ est diagonalisable.

(d) En répondant à la troisième question, on a constaté que les vecteurs propres de $p \circ q$ associés à des valeurs propres autres que 0 appartiennent tous au *sev* $\operatorname{Im} p$ et que leurs valeurs propres sont aussi des valeurs propres de $p \circ q \circ p$. Elles sont donc positives d'après la première question. D'où $\operatorname{Sp}(p \circ q) \subset \mathbb{R}_+$. Enfin, pour tout $x \in E$, $\|q(x)\|_2 \leq \|x\|_2$ car le projecteur q est orthogonal. De même, $\|p(q(x)\|_2 \leq \|q(x)\|_2$. Par transitivité, $\|p \circ q(x)\|_2 \leq \|x\|_2$. D'où $|\lambda| \leq 1$ pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}(p \circ q)$.

45. RMS 2024 754 Mines Ponts MP MPI

Soit une fonction $f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que $120 \left(\int_0^1 f \right)^2 \leq \int_0^1 (f'')^2$.

1.4 Espaces vectoriels normés

46. RMS 2014 661 Mines Ponts PSI

Mots-clés : continuité d'une application linéaire

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\| \ \|_\infty$. Soient $e \in E$ et $T_e\colon f \in E \mapsto \int_0^1 e(t) f(t) \,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$. Montrer que T_e est une forme linéaire continue et calculer $|||T_e|||_\infty$, la norme de T_e subordonnée à $\| \ \|_\infty$.

Ind. Considérer $f_\varepsilon\colon t \mapsto \frac{e(t)}{|e(t)|+\varepsilon}$, où $\varepsilon > 0$.

Solution. — T_e est linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $|T_e(f)| \leqslant \int_0^1 |e(t)| . \|f\|_\infty = \|e\|_1 . \|f\|_\infty$ donc T_e est continue et $|||T_e|||_\infty \leqslant \|e\|_1$.

$T_e(f_\varepsilon) = \int_0^1 \frac{e^2(t)}{|e(t)|+\varepsilon} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(|e(t)| - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{|e(t)|+\varepsilon} \right) \mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 (|e(t)| - \varepsilon) \,\mathrm{d}t = \|e\|_1 - \varepsilon$ et $\|f_\varepsilon\|_\infty \leq 1$, d'où $|||T_e|||_\infty \geq \|e\|_1 - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $|||T_e|||_\infty \geq \|e\|_1$, donc $|||T_e|||_\infty = \|e\|_1$.

47. RMS 2009 1031 Centrale PC

Mots-clés : continuité d'une application linéaire

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on pose $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2}$ et $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$. On fixe un réel α dans $[0, 1]$.

(a) On pose $f_n\colon x \in [0,1] \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 + [n(x-\alpha)]^2}}$. Montrer que $\|f_n\|_2$ tend vers zéro.

(b) L'application $\Phi\colon f \in E \mapsto f(\alpha) \in \mathbb{R}$ est-elle continue pour la norme $\| \ \|_2$?

(c) Existe-t-il un réel $C > 0$ tel que $\forall f \in E$, $\|f\|_\infty \leqslant C \|f\|_2$?

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Existe-t-il $C > 0$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\|P\|_\infty \leqslant C \|P\|_2$?

48. RMS 2015 995 CCP PSI

Soit E l'espace des suites bornées à valeurs complexes. Montrer que $N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$ et $N'(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{n!}$ sont deux normes sur E. Sont-elles équivalentes ?

Solution. — Soit $u \in E$. Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$. Alors $\frac{|u_n|}{2^n} \leqslant \frac{M}{2^n}$ et $\frac{|u_n|}{n!} \leqslant \frac{M}{n!}$, ce qui prouve la convergence des deux séries définissant $N(u)$ et $N'(u)$: les fonctions N et N' sont bien définies. Vérifions les axiomes des normes.

— Une somme de termes positifs étant nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls, on a : $N(u) = 0 \iff u = 0$ et $N'(u) = 0 \iff u = 0$.
— On vérifie que $N(\lambda u)|\lambda|N((u)$ et de même pour N'.
— Soient u et v dans E. L'inégalié triangulaire $N(u+v) \leqslant N(u)+N(v)$ résulte de la sommation des inégalités triangulaires $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n|$, préalablement divisées par 2^n, et il est est de même pour N'.

On conclut que N et N' sont deux normes sur E. Il est vrai que $N' \leqslant N$; pour autant, ces deux normes ne sont pas équivalentes. Si elles l'étaient, il existerait $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $N \leqslant \alpha N'$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on considère la suite $e_p = (\delta_{n,p})_{n\in\mathbb{N}} \in E$. On aurait alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \frac{N(e_p)}{N'(e_p)} = \frac{1/2^p}{1/p!} = \frac{p!}{2^p} \leqslant \alpha.$$

Or la suite de terme général $\frac{p!}{2^p}$ n'est pas bornée.

49. RMS 2009 977 Centrale PSI

On note $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le déterminant vaut 1. L'ensemble $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est-il un espace vectoriel ? une groupe multiplicatif ? un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Solution. — $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un espace vectoriel car la matrice nulle n'a pas pour déterminant 1. Mais c'est un groupe multiplicatif car : le produit matriciel est associatif et le produit de deux matrices M et N de déterminant 1 a encore pour déterminant $\det M \cdot \det N = 1$; la matrice I_n, qui a pour déterminant 1, est l'élément neutre ; toute matrice M de déterminant 1 est inversible et son inverse a pour déterminant $\frac{1}{\det M} = 1$.

$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque du singleton $\{1\}$, qui est une partie fermée de $\mathbb{R}$, par l'application continue det. À ce titre, c'est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. La matrice tM tend vers la matrice M quand le réel t tend vers 1. Or $\det(tM) = t^n$, ce qui montre que toute boule ouverte centrée en M contient des matrices qui ne sont pas dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Par suite $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas ouvert. Mieux : aucun point de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ n'est intérieur.

50. RMS 2024 102 ENS MP MPI

Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ nulle sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et définie par $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{p+q}$ si $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux. Quels sont les points de continuité de f ?

Solution. — En chaque point x rationnel, la fonction n'est pas continue. Par l'absurde : par densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de nombres irrationnels u_n convergeant vers x. Si f est continue en $x \in \mathbb{Q}$, alors $f(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$. C'est absurde car $f(u_n) = 0$ pour tout n et $f(x) \neq 0$.

En chaque point x irrationnel, la fonction est continue. En effet, soit $\varepsilon > 0$: il n'y qu'un nombre fini de rationnels $\frac{p}{q}$ tels que $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{p+q} > \varepsilon$ car $\frac{1}{p+q} > \varepsilon \implies p + q < \frac{1}{\varepsilon}$. Dans un certain voisinage de $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tous les rationnels, et donc tous les réels, ont ainsi une image inférieure à ε. La fonction f a donc pour limite 0 en x, or $f(x) = 0$, donc f est continue en x.

51. RMS 2025 635 Mines-Ponts MP-MPI

Soient E un espace vectoriel normé et f une forme linéaire continue non nulle. Soit $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$.

(a) Montrer que : $\|f\|_{op} = \frac{|f(x_0)|}{d(x_0,\mathrm{Ker} f)}$.

(b) Montrer que les deux propriétés (i) $\exists a \in E,\ \|f\|_{op} = \frac{|f(a)|}{\|a\|}$ et (ii) $\exists y \in \mathrm{Ker} f,\ d(x_0, \mathrm{Ker} f) = \|x_0 - y\|$ sont équivalentes.

Solution. —

(a) La forme linéaire f est continue, d'où $\exists K \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $|f(x)| \leq K\|x\|$ et $\|f\|_{op}$ est par définition le plus petit K possible.

Pour tout vecteur $k \in \mathrm{Ker} f$, $f(x_0 - k) = f(x_0) - f(k) = f(x_0)$, d'où $|f(x_0)| \leq K\|x_0 - k\|$. D'où $|f(x_0)|$ est un minorant de $K\|x_0 - k\|$. Or $Kd(x_0, \mathrm{Ker} f)$ est le plus grand minorant de $K\|x_0 - k\|$. Donc $|f(x_0)| \leq Kd(x_0, \mathrm{Ker} f)$, en particulier $|f(x_0)| \leq \|f\|_{op} d(x_0, \mathrm{Ker} f)$ (*).

Par ailleurs, pour tout $x \in E$, $\|x\| = \|x - 0_E\| \geq d(x, \mathrm{Ker} f)$ car $0_E \in \mathrm{Ker} f$. Si $f(x) \neq 0$, alors $\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \frac{|f(x)|}{d(x,\mathrm{Ker} f)}$ qui est égal à $\frac{|f(x_0)|}{d(x_0,\mathrm{Ker} f)}$ car $(***)$. D'où $|f(x)| \leq \frac{|f(x_0)|}{d(x_0,\mathrm{Ker} f)}$ et cette inégalité reste vraie si $f(x) = 0$ et est donc vraie pour tout $x \in E$. Donc $\|f\|_{op} \leq \frac{|f(x_0)|}{d(x_0,\mathrm{Ker} f)}$ (**) par la définition rappelée de $\|f\|_{op}$.

Des deux inégalités (*) et (**), on conclut que $\|f\|_{op} = \frac{|f(x_0)|}{d(x_0,\mathrm{Ker} f)}$.

(***) Soit $\lambda = \frac{f(x)}{f(x_0)}$. Alors $f(x - \lambda x_0) = f(x) - \lambda f(x_0) = 0_E$, d'où le vecteur $x - \lambda x_0$ appartient à $\mathrm{Ker} f$, donc $d(x, \mathrm{Ker} f) = d(\lambda x_0, \mathrm{Ker} f) = |\lambda| d(x_0, \mathrm{Ker} f)$. Par ailleurs, $|f(x)| = |\lambda||f(x_0)|$. Donc $\frac{|f(x)|}{d(x,\mathrm{Ker} f)} = \frac{|f(x_0)|}{d(x_0,\mathrm{Ker} f)}$.

(b) Si (ii), alors $\exists y \in \mathrm{Ker} f$, $\|f\|_{op} = \frac{|f(x_0)|}{\|x_0 - y\|}$. Or $f(x_0) = f(x_0) - f(y) = f(x_0 - y)$, d'où $\|f\|_{op} = \frac{|f(x_0 - y)|}{\|x_0 - y\|}$, donc (i).

Réciproquement : si (i), alors $\exists a \in E$, $\frac{|f(x_0)|}{d(x_0,\mathrm{Ker} f)} = \frac{|f(a)|}{\|a\|}$. D'où $d(x_0, \mathrm{Ker} f) = \frac{|f(x_0)|}{|f(a)|}\|a\|$ (on peut diviser par $f(a)$ qui n'est pas nul car $\|f\|_{op} \neq 0$ car $f(x_0) \neq 0$). Soit $\lambda = \frac{f(x_0)}{f(a)}$. Alors $d(x_0, \mathrm{Ker} f) = |\lambda|\|a\| = \|\lambda a\|$ et le vecteur $y = x_0 - \lambda a$ appartient à $\mathrm{Ker} f$, donc (ii).

52. UPS 20250506

Mots-clés : moyenne, adhérence

Soit E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions bornées de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit A, resp. B, l'ensemble des fonctions de E lispchitziennes, resp. uniformément continues.

(a) Vérifier que $A \subset B$ mais que $B \not\subset A$.

(b) Montrer que B est l'adhérence de A : $\bar{A} = B$. (On pourra considérer une fonction $f \in B$ et la suite des fonctions f_n définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = n\int_0^{1/n} f(t+x)\,dt$.)

1.5 Algèbre générale

53. RMS 2015 384 X ESPCI PC, RMS 2014 1165 CCP PSI

(a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples.

i. Calculer $\frac{P'(x)}{P(x)}$ pour tout x appartenenant à $\mathbb{R}$ privé des racines de P. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x)P''(x) \leqslant P'(x)^2$.

ii. Montrer que, si $\deg P \geq 2$, alors P' est aussi scindé à racines simples. En déduire que, si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $a_k a_{k+2} \leqslant a_{k+1}^2$ pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$.

(b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé. Le polynôme P' l'est-il aussi ?

54. RMS 2014 892 Centrale PSI

(a) Soient un réel a et une fonction f continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$. On suppose que f s'annule en a et tend vers 0 en $+\infty$: qu'en déduire ? (On pourra utiliser la fonction $x \mapsto f(a + \frac{1}{x} - 1)$ pour le prouver.)

(b) Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}$. Montrer que, si P n'a pas de racine réelle, alors Q non plus. (On pourra utiliser la fonction $x \mapsto Q(x)e^{-x}$.)

55. RMS 2013 288 X ESPCI PC

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2 + 1) = P(X)^2 + 1$ et $P(0) = 0$.

Solution. — On va démontrer que X est l'unique solution.

Définissons la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = a_n^2 + 1$. Comme a_n est réel et que $x^2 - x + 1$ reste strictement positif sur $\mathbb{R}$ on a $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n + 1 > 0$ et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante donc injective $(m \neq n \Rightarrow a_m \neq a_n)$.

Soit alors P une solution du problème posé. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $P(a_n) = a_n$.

C'est vrai pour $n = 0$ puisque $a_0 = 0$ et $P(0) = 0$ et si c'est vrai pour un entier n donné alors

$$P(a_{n+1}) = P(a_n^2 + 1) = P(a_n)^2 + 1 = a_n^2 + 1 = a_{n+1}.$$

Il s'ensuit que le polynôme $P(X) - X$ est nul car il admet une infinité de racines et donc que $P = X$.

56. RMS 2012 272 X ESPCI PC

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R},\ P_n(\sin^2 t) = \cos(2nt)$ et le déterminer.

57. RMS 2013 1048 TPE EIVP PC

Soient a, b dans $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X-a)^n(X-b)^n$.

Donner une expression de la dérivée n-ième de P et en déduire $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$ en fonction de n.

58. RMS 2010 606 Mines Ponts PC

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.

59. RMS 2012 268 X ESPCI PC

Mots-clés : nombre de diviseurs d'un entier

(a) Soit n un entier strictement positif dont la décomposition en facteurs premiers est $\prod_{j=1}^{r} p_j^{\alpha_j}$. Déterminer le nombre de diviseurs de n.

(b) Quels sont les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ ayant un nombre impair de diviseurs ?

60. RMS 2009 1009 Centrale PC

Mots-clés : polynômes stabilisant $\mathbb{Z}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\binom{X}{n}$ ou H_n le polynôme $\frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$. On pose $\Delta \colon P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}[X]$.

(a) On dit qu'un polynôme P stabilise $\mathbb{Z}$ si $\forall k \in \mathbb{Z},\ P(k) \in \mathbb{Z}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n stabilise $\mathbb{Z}$.

(b) Déterminer $\operatorname{Ker} \Delta$ et calculer $\Delta(H_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ stabilisant $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $(c_0, \ldots, c_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tel que $P = c_0H_0 + \cdots + c_nH_n$.

Solution. —

(a) Soit $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Alors $H_j(k) = \frac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{j!}$ est un entier relatif car

— si $k \geqslant j$, on obtient $\binom{k}{k-j}$, qui est bien entier ;

— si $k < 0$, alors $H_j(k) = (-1)^j H_j(j-k-1)$, et on est ramené au cas précédent ;

— si $0 \leqslant k < j$, alors zéro figure parmi les facteurs du numérateur, donc $H_j(k) = 0$.

(b) Si $\Delta(P) = 0$, alors $\forall k \in \mathbb{Z},\ P(k) = P(0)$, d'où $Q(k) = 0$, en notant $Q(X) = P(X) - P(0)$. Le polynôme Q est nul car il possède une infinité de racines. Donc le polynôme $P(X) = P(0)$ est constant. Réciproquement : si P est constant, alors $\Delta(P) = 0$. Finalement $\operatorname{Ker} \Delta = \mathbb{R}_0[X]$.

Puis $\Delta(H_n) = H_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta(H_0) = 0$.

(c) On démontre la propriété par récurrence sur n. Si $n = 0$, alors $P = c_0 \in \mathbb{R}_0[X]$ stabilise $\mathbb{Z}$ implique $c_0 \in \mathbb{Z}$.

On suppose la propriété établie pour $n-1$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ stabilisant $\mathbb{Z}$. Alors $\Delta(P)$ aussi, et comme $\Delta(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, il existe $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\Delta(P) = \sum_{j=1}^{n} c_j H_{j-1}$.

Comme $\sum_{j=1}^{n} c_j H_j$ est l'un des antécédents de $\sum_{j=1}^{n} c_j H_{j-1}$ par Δ, et comme $\operatorname{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$, on peut affirmer qu'il existe une constante *réelle* c_0 telle que $P = \sum_{j=1}^{n} c_j H_j + c_0$.

Enfin, comme $P(0) = c_0$ et P stabilise $\mathbb{Z}$, on peut dire que $c_0 \in \mathbb{Z}$.

Un exercice en rapport : **RMS 2010 870 Centrale PC**

Mots-clés : polynômes stabilisant $\mathbb{Q}$

Déterminer les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Solution. — Ce sont les polynômes de $\mathbb{Q}[X]$, c'est-à-dire à coefficients rationnels. D'une part, ces polynômes conviennent. D'autre part, on montre par récurrence sur le degré qu'il n'y en a pas d'autres :

Si P est une constante réelle a_0, comme $P(Q) = \{a_0\}$, la condition $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ implique effectivement que a_0 soit rationnel. Supposons la propriété vraie pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. Soit $P = a_nX^n + Q$, avec $a_n \neq 0$ et $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, tel que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Alors $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$ vérifie aussi $[\Delta(P)](\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Or $\Delta(P) = na_nX^{n-1} + \cdots$ est de degré $n-1$. L'hypothèse de récurrence assure que $\Delta(P)$ est à coefficients rationnels, et en particulier que $na_n \in \mathbb{Q}$, donc que $a_n \in \mathbb{Q}$. Dans ce cas, l'hypothèse $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ se traduit par $Q(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$, et l'hypothèse de récurrence assure que Q est à coefficients rationnels. Finalement $P \in \mathbb{Q}[X]$.

61. RMS 2024 14 ENS MP MPI

Mots-clés : formule de Grassmann

Soit G un groupe fini. Si X et Y sont des parties non vides de G, alors on pose $X^{-1} = \{x^{-1},\ x \in X\}$ et $XY = \{xy,\ (x, y) \in X \times Y\}$. Dans la suite, X désigne une partie non vide de G.

(a) On suppose que $|XX| < 2|X|$. Montrer que $XX^{-1} = X^{-1}X$.

(b) On suppose que $|XX^{-1}| < \frac{3}{2}|X|$. Montrer que $X^{-1}X$ est un sous-groupe de G.

62. RMS 2024 424 X ESPCI PC

On veut montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m) \in \{-1; +1\}^m$ tel que $n = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k k^2$.

(a) Prouver la propriété pour tout $n \in \{1; 2; 3\}$.

(b) Développer les polynômes $(X+3)^2 - (X+1)^2$ et $(X+4)^2 - (X+2)^2$ et conclure.

63. RMS 2024 519 Mines Ponts MP MPI

Déterminer tous les couples $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $3^m = 8 + n^2$.

64. RMS 2024 12 ENS MP MPI

Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une transposition (ab) telle que $1 \leq a < b \leq n$.

(a) Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la transposition (12) et le cycle $c = (12 \cdots n)$ engendrent le groupe symétrique S_n.

(b) Montrer que la transposition $\tau = (13)$ et le cycle $c = (1234)$ n'engendrent pas le groupe symétrique S_4. (On pourra s'intéresser à la parité de $\tau(i) - i$ et de $c(i) - i$ pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$.)

(c) Montrer que la transposition (ab) et le cycle $c = (12 \cdots n)$ engendrent S_n si, et seulement si, $b - a$ et n sont premiers entre eux.

65. B5 X

Mots-clés : sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{C})$

Soient E un $\mathbb{C} - ev$ de dimension finie et G un sous-groupe fini de l'ensemble $GL(E)$ des automorphismes de E. Montrer que :

(a) tout endomorphisme de G est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des racines de l'unité.

(b) la trace moyenne $\frac{1}{\mathrm{Card} G} \sum_{f \in G} \mathrm{tr} f$ est égale à la dimension de l'ensemble $\{x \in E | \forall g \in G,\ g(x) = x\}$ des vecteurs invariants.

2 Analyse

2.1 Suites & séries numériques

66. RMS 2006 1124 CCP PC

Soit $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ une série convergente à termes strictement positifs. Montrer que les séries $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ et $\sum_{n \geqslant 0} e^{-1/u_n}$ convergent.

67. RMS 2013 1061 CCP PC

Soit (u_n) définie par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n$.

(a) Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

(b) Étudier la limite de $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^3}$. En déduire la nature de la série de terme général u_n^3.

(c) En étudiant $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$, montrer que la série de terme général u_n^2 diverge.

Solution. — (Voir aussi ▷ **l'exercice 10 du TD 1**.)

(a) La suite de terme général $u_{n+1} = \sin(u_n)$ est minorée par 0 (on le montre par récurrence) et décroissante (car $\forall x \geq 0,\ \sin(x) \leq x$). Donc elle converge. Sa limite est un point fixe de sin, or le seul point fixe de sin est 0 (on le prouve en étudiant la fontion $x \mapsto x - \sin x$). Donc la suite (u_n) converge vers 0.

(b) Un développement limité fournit $\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{3!} + o(1)$ donc, puisque $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$, on a $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^3} \to -\frac{1}{6}$ quand $n \to +\infty$.
On en déduit l'équivalence $u_n^3 \sim_{n \to +\infty} -6(u_{n+1} - u_n)$ à termes positifs, et la somme partielle de la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge (somme partielle télescopique) car (u_n) converge, donc par équivalence, la série de terme général u_n^3 converge.

(c) (Voir aussi la dernière question de l'exercice 68.) On a $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = \ln(\frac{\sin u_n}{u_n}) \sim \frac{\sin u_n}{u_n} - 1 = \frac{\sin u_n - u_n}{u_n} \sim -\frac{1}{6} u_n^2$, à termes négatifs. La série de terme général u_n^2 a même nature que la série de terme général $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, et celle ci diverge (on le voit par somme partielle télescopique, sachant que $\ln(u_n) \to -\infty$).

68. RMS 2014 668 Mines Ponts PSI

Soit la suite définie par $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$.

(a) Étudier la limite de cette suite.

(b) Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.

(c) Déterminer la nature de la série de terme général a_n^2.

(d) Étudier la série de terme général $\ln(\frac{a_{n+1}}{a_n})$. En déduire la nature de la série de terme général a_n.

Solution. —

(a) Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geq 1+x$, d'où $a_{n+1} \leqslant a_n$ pour tout n, donc (a_n) est décroissante et, par récurrence, est minorée par 0, donc (a_n) converge. Sa limite vérifie $\ell = 1 - e^{-\ell}$ donc $\ell = 0$.

(b) La série $\sum(-1)^n a_n$ est alternée et vérifie les hypothèses du CSSA : elle converge.

(c) On effectue un développement limité : puisque $a_n \to 0$, $a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2}{2} + \mathrm{o}\left(a_n^2\right)$ donc $a_n^2 \sim 2(a_n - a_{n+1})$ dont la série converge car ses sommes partielles sont télescopiques et la suite (a_n) converge.

(d) (Voir aussi la dernière question de l'exercice 67.) $S_n = \sum_{k=0}^n \ln \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ln a_{n+1} - \ln a_0 \to -\infty$ donc la série diverge. En reprenant le développement limité précédent, on a $\ln \frac{a_{n+1}}{a_n} \sim -\frac{a_n}{2}$ (<0). On en déduit que $\sum a_n$ diverge.

69. RMS 2013 688 Mines Ponts PC

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ bornée et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose $\alpha = \sup_{\mathbb{R}_+} f$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que f^n est intégrable. Soit $u_n = \int_0^{+\infty} f^n$.

(b) Si $\alpha < 1$, montrer que la série de terme général u_n est convergente.

(c) Si $\alpha > 1$, montrer que la série de terme général u_n est divergente.

70. RMS 2012 1327 CCP PC

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 1–périodique et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que la série de terme général u_n converge si, et seulement si, $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

71. RMS 132 1163 CCP PSI 2021, RMS 130 1236 CCP PSI 2019

Soient deux suites réelles (a_n) positive et (u_n) définie par $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Comparer $u_{n+1} - u_n$ et $\frac{1}{2}a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Déterminer un équivalent de a_n dans le cas où $u_n = \frac{n}{n+1}$.

(c) La convergence de la suite (u_n) implique-t-elle la convergence de la série $\sum a_n$? Et réciproquement ?

72. RMS 2007 912 CCP PSI

Soient, pour tout réel $t \geq 1$, $f(t) = \frac{t}{t^2+t+1}$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin t\,\mathrm{d}t$.

Étudier le sens de variation de la fonction f, le sens de variation de la suite $(|u_n|)$ et la nature de la série $\sum u_n$.

73. RMS 2008 980 Télécom Sud Paris PSI, RMS 2013 657 Mines Ponts PC, RMS 2014 751 Mines Ponts PC

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^n \cos(u_{n-1})}{n}$. Nature de la série de terme général u_n ?

Solution. — Pour $n \geqslant 1$, on a $|u_n| \leqslant \frac{1}{n}$, donc la suite de terme général u_n tend vers zéro, donc on dispose du développement limité $\cos(u_{n-1}) = 1 - \frac{u_{n-1}^2}{2} + \mathrm{o}(u_{n-1})^2$. Par suite

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n u_{n-1}^2}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{u_{n-1}^2}{n}\right) = x_n + y_n + \mathrm{o}(y_n),$$

avec des notations évidentes pour les suites (x_n) et (y_n). La série $\sum x_n$ converge, par application du théorème des séries alternées. Comme $|y_n| \leqslant \frac{1}{2n(n-1)^2}$ pour tout $n \geqslant 2$, d'où $y_n + \mathrm{o}(y_n) = O(\frac{1}{n^2})$ et $\frac{1}{n^2}$ ne change pas de signe, donc la série $\sum(y_n + \mathrm{o}(y_n))$ converge absolument. Finalement, la série $\sum u_n$ converge.

74. RMS 2012 328 X ESPCI PC

Mots-clés : transformation d'Abel

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que (u_n) est décroissante et que la série de terme général u_n converge.

(a) Montrer que $\sum_{k=0}^n u_k = (n+1)u_n + \sum_{k=1}^n k(u_{k-1} - u_k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que la suite de terme général $(n+1)u_n$ converge. En déduire que $nu_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

75. RMS 2013 344 X ESPCI PC

(a) Soient deux réels a et b tels que $b > a$. Étudier la limite de la suite des réels $\left(b + \sqrt[3]{n}\right)^3 - \left(a + \sqrt[3]{n}\right)^3$.

(b) Montrer que l'ensemble $E = \left\{\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n},\ (m,n) \in \mathbb{N}^2\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

76. RMS 2024 722 Mines Ponts MP MPI

Soient (u_n) une suite décroissante de réels positifs et (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

2.2 Intégrales

77. RMS 2014 1247 ICNA PSI

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur le réel α pour que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha(1-e^{-1/\sqrt{x}})\,\mathrm{d}x$ converge.

Solution. —

- La fonction $x \mapsto x^\alpha(1-e^{-1/\sqrt{x}})$ est continue positive sur $]0,+\infty[$.
- Comme $x^\alpha(1-e^{-1/\sqrt{x}}) \sim x^\alpha$ quand $x \to 0$, l'intégrale $\int_0^1 x^\alpha(1-e^{-1/\sqrt{x}})\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha > -1$.
- Comme $x^\alpha(1-e^{-1/\sqrt{x}}) \sim x^{\alpha-1/2}$ quand $x \to +\infty$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} x^\alpha(1-e^{-1/\sqrt{x}})\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha < -1/2$.

Conclusion :

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha(1-e^{-1/\sqrt{x}})\,\mathrm{d}x \text{ converge} \iff -1 < \alpha < -\frac{1}{2}.$$

78. RMS 2014 1249 ENSAM PSI

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ et F sa primitive qui s'annule en 0.

(a) Montrer que : si $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{F(x)}{1+x}$ pour tout $x \geq 0$.

(b) Montrer que les deux intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et comparer leur valeur.

Solution. —

(a) On suppose que $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge. En utilisant la croissance de F (c'est la primitive d'une fonction positive) et la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$, on montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \geqslant F(x)\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = F(x)\left[-\frac{1}{1+t}\right]_x^{+\infty} = \frac{F(x)}{1+x}.$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Une intégration par parties sur le segment $[0,x]$ (justifiée car les fontions $t \mapsto F(t)$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$) montre que

$$\int_0^x \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{F(t)}{1+t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{F(x)}{1+x} + \int_0^x \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

- On suppose que $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
  De la question précédente, on déduit que : majoré par un reste d'intégrale convergente, le quotient positif $\frac{F(x)}{1+x}$ tend vers zéro quand $x \to +\infty$.
  On en déduit que $\int_0^x \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge et a la même limite que $\int_0^x \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$. Donc
  $$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$
- On suppose que $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge. Comme $f \geqslant 0$, il en est de même de F, et la relation ci-dessus montre que
  $$\int_0^x \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$
  La fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ étant croissante et majorée, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge d'après le théorème de la limite monotone.
- En conclusion : les deux intégrales ont la même nature et, quand elles convergent, elles ont la même valeur.

79. RMS 2013 376 X ESPCI PC, RMS 2014 761 Mines Ponts PC

Mots-clés : théorème de Cesàro pour les fonctions

(a) Soit F une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ admettant une limite finie L en $+\infty$. Montrer que $\frac{1}{x}\int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L$.

(b) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente. Montrer que $\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

80. RMS 2015 1003 CCP PSI

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} xe^{-\lfloor x \rfloor}\,\mathrm{d}x$.

Solution. — La fonction $f\colon x \mapsto xe^{-\lfloor x \rfloor}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et $0 \leqslant f(x) \leqslant xe^{-x+1} = \mathrm{o}(e^{-x/2})$ quand $x \to +\infty$, donc l'intégrale étudiée converge. On a

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} xe^{-\lfloor x \rfloor}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} xe^{-n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}\left[\frac{x^2}{2}\right]_n^{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)e^{-n}.$$

Posons $g\colon x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1} = \frac{x}{1-x^2}$. Cette fonction est la somme d'une série entière de rayon de convergence 1. Or on peut dériver terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence. D'où : $\forall x \in]-1,1[$, $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)x^{2n} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$, donc (parce que $\mathrm{e}^{-1} \in]-1,+1[$) : $\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)e^{-n} = g'(e^{-1/2}) = \frac{1+e^{-1}}{(1-e^{-1})^2}$. On conclut que

$$\int_0^{+\infty} xe^{-\lfloor x \rfloor}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)e^{-n} = \frac{1}{2}\frac{1+e^{-1}}{(1-e^{-1})^2}.$$

Un exercice en rapport : **RMS 2011 1140 Télécom Sud Paris PC**

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \lfloor x \rfloor e^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente et qu'elle vaut $\frac{1}{e-1}$.

Solution. — On note f la fonction $x \in [0,+\infty[\mapsto \lfloor x \rfloor e^{-x}$. La continuité par morceaux de f et la limite $\lim_{+\infty} x^2 f(x) = 0$ montrent que f est intégrable sur $[0,+\infty[$. On calcule ensuite $\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}$, en effectuant le changement d'indice $j = k+1$:

$$\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} ke^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} k\left(e^{-k} - e^{-(k+1)}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} ke^{-k} - \sum_{j=1}^{n}(j-1)e^{-j} = \sum_{k=1}^{n-1} e^{-k} - (n-1)e^{-n}.$$

Comme $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\lim_{n\to+\infty}(n-1)e^{-n} = 0$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \lfloor x \rfloor e^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k} = \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} = \frac{1}{e-1}.$$

81. RMS 2014 781 Mines Ponts PC & RMS 2016 852 Centrale PC

Soit $F\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Former une équation différentielle vérifiée par F et en déduire la limite de F en 0^+.

(c) Déterminer un équivalent de F en $+\infty$.

Solution. — On pose $f\colon (x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mapsto \frac{e^{-t}}{x+t}$.

(a) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On applique le théorème de dérivation sous le signe intégral en utilisant la domination

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\,\times\mathbb{R}_+^*,\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|(-1)\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\right| \leqslant \varphi(t) := \frac{e^{-t}}{(a+t)^2}.$$

sans oublier auparavant de montrer que, pour chaque x, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable . On en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}$.

(b) $F'(x) = -\frac{1}{x} + F(x)$ en intégrant par parties. D'où $F'(x) - F(x) = -\frac{1}{x}$. On résout cette équation différentielle en faisant varier la constante et on trouve ainsi que : $F(x) = \left(K - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt\right)e^x$, où K est une constante. Or $\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$. Donc $F(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.

(c) $\frac{1}{x} - F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+t}\right)\,dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\frac{t}{x(x+t)}\,dt = o\left(\frac{1}{x}\right)$ quand $x \to +\infty$

car $x\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\frac{t}{x(x+t)}\,dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\frac{t}{x+t}\,dt \leq \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,dt$, où l'intégrale $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est bien convergente.

82. RMS 2013 917 Centrale PC

Soit $F\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{t+x}\,dt$.

(a) Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Calculer les intégrales $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\,dt$. Étudier la limite de $1 - xF(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Conclure.

83. RMS 2016 795 Centrale PSI

On considère la fonction $F\colon x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \cdot \frac{\operatorname{sh} t}{t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition de F.

(b) Déterminer la limite de F en $+\infty$.

Solution. —

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto e^{-xt} \cdot \frac{\operatorname{sh} t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, positive, et $\frac{\operatorname{sh} t}{t} \to 1$ quand $t \to 0$ donc l'intégrale est faussement impropre en 0. Et comme $\operatorname{sh} t \sim \frac{e^t}{2}$ quand $t \to +\infty$, on obtient

$$e^{-xt}\frac{\operatorname{sh} t}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{(1-x)t}}{2t}.$$

Lorsque $x > 1$, on a donc $e^{-xt}\frac{\operatorname{sh} t}{t} = \mathrm{O}_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$ donc la fonction est intégrable. Lorsque $x \leqslant 1$, on a au contraire $\frac{1}{t} = \mathrm{O}_{+\infty}(e^{-xt}\frac{\operatorname{sh} t}{t})$ et comme $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable, alors l'intégrale diverge. Finalement F est définie sur

$$D_F =]\,1\,; +\infty\,[\,.$$

(b) Pour $x > a > 1$, on peut par exemple encadrer l'intégrande par $\forall t > 0$, $0 \leqslant e^{-xt}\frac{\operatorname{sh} t}{t} = e^{-at}\frac{\operatorname{sh} t}{t}e^{-(x-a)t} \leqslant Me^{-(x-a)t}$, où $M = \sup\left(e^{-at}\frac{\operatorname{sh} t}{t}, t \in \mathbb{R}_+^*\right)$. En effet la fonction $t \mapsto e^{-at}\frac{\operatorname{sh} t}{t}$ est bornée, puisque continue et de limites finies en 0 (1) et en $+\infty$ (0).

En intégrant, il vient $0 \leqslant F(x) \leqslant M\int_0^{+\infty} e^{-(x-a)t}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{x-a}$. Par le théorème des gendarmes,

$$F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Autre méthode — Soit une suite (u_n) tendant vers $+\infty$: d'une part, $e^{-u_nt}\frac{\operatorname{sh} t}{t} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $t \in]0, +\infty[$; d'autre part, $u_n \geq 2$ à partir d'un certain rang, d'où $e^{-u_nt}\frac{\operatorname{sh} t}{t} \leq e^{-2t}\frac{\operatorname{sh} t}{t}$. Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-2t}\frac{\operatorname{sh} t}{t}\,dt$ est convergente (car on a montré ci-dessus que $F(2)$ est défini).

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-u_nt}\frac{\operatorname{sh} t}{t}\,dt$ tend vers zéro d'après le théorème de la convergence dominée.

Ceci est vrai pour toute suite (u_n) tendant vers $+\infty$, donc $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\operatorname{sh} t}{t}\,dt$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$ d'après la caractérisation séquentielle de la limite.

2.3 Suites & séries de fonctions

84. CCP PSI 2021

(a) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n^{1/3}\sin\left(\frac{t}{n^{1/3}}\right)}{1+t^3}\,dt$ est convergente.

(b) Montrer que la suite des réels J_n converge vers le réel $K = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}\,dt$.

(c) À l'aide d'un changement de variable, prouver que $K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}\,dt$ et en déduire la valeur du réel K.

Solution. — Soit $f_n(t) = \frac{n^{1/3}\sin\left(\frac{t}{n^{1/3}}\right)}{1+t^3}$.

(a) $|f_n(t)| \leq \frac{n^{1/3}}{1+t^3} \sim \frac{n^{1/3}}{t^3}$ quand t tend vers $+\infty$. Donc l'intégrale J_n est convergente d'après le critère de Riemann.

(b) Chaque fontion f_n est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et la suite (f_n) converge simplement vers la fonction continue par morceaux $f : t \mapsto \frac{t}{1+t^3}$ car $\sin\left(\frac{t}{n^{1/3}}\right) \sim \frac{t}{n^{1/3}}$ quand n tend vers ∞. De plus, pour tout $t \in [0, +\infty[$, $|f_n(t)| \leq \frac{t}{1+t^3}$ car $|\sin x| \leq x$ pour tout réel x positif. D'où $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ tend vers $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ d'après le théorème de la convergence dominée. Donc la suite des réels J_n converge vers le réel K.

(c) Le changement de variable $t \mapsto \frac{1}{t}$, qui est bien $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $]0,+\infty[$, prouve que $K=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^3}\,dt$. Par suite $2K=\int_0^{+\infty}\frac{1+t}{1+t^3}\,dt$. Or $\frac{1+t}{1+t^3}=\frac{1}{t^2-t+1}$ et $t^2-t+1=(t-\frac12)^2+\frac34=\frac34\left[1+\frac43(t-\frac12)^2\right]$. On se ramène, par le changement de variable $t\mapsto\frac{2}{\sqrt3}(t-\frac12)$, qui est bien $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $]0,+\infty[$, à un calcul d'arctangente pour montrer que $\int_0^{\infty}\frac{1}{t^2-t+1}\,dt=\frac{4\pi}{3\sqrt3}$.

85. RMS 2013 1005 CCP PSI, RMS 2008 982 TPE PSI, RMS 2013 1005 CCP PSI, RMS 2015 748 Mines Ponts PC & RMS 2016 849 Centrale PC

Mots-clés : primitives itérées

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a<b$, $f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $f_0=f$, et, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[a,b]$, $f_{n+1}(x)=\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $[a,b]$ et déterminer sa somme $S=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n$ en résolvant une équation différentielle.

86. RMS 2009 1050 Centrale PC

Quel est l'ensemble de définition de $f\,:\,x\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$? Cette fonction est-elle continue ?

87. RMS 2016 937 CCP PSI

Montrer que $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}$ est défini pour tout réel x et que, pour tout $x\neq0$, $S(x)=S(\frac1x)$. Étudier la limite de S en $+\infty$.

88. RMS 2016 513 Mines Ponts PSI

Soit $S\colon x\in\mathbb{R}_+^*\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

(a) Montrer que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudier le sens de variation de S.

(b) Étudier les limites de S en 0 et en $+\infty$.

(c) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ xS(x)-S(x+1)=\frac1e$.

(d) Déterminer un équivalent de S en 0^+ et en $+\infty$.

Solution. — Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $f_n\colon x\in\mathbb{R}+^*\mapsto\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

(a) Fixons $x\geq0$: la série numérique $\sum f_n(x)$ est absolument convergente car $\left|\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}\right|\leq\frac{1}{n!}$ et la série $\sum\frac{1}{n!}$ converge. Les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f_n'(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{n!(x+n)^2}$. Soit $a>0$:

$$\forall x\in[a,+\infty[,\quad\forall n\in\mathbb{N},\quad|f_n'(x)|\leqslant\frac{1}{n!(a+n)^2},$$

terme général d'une série convergente. Donc la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a,+\infty[$. Il résulte du théorème de dérivation terme à terme que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$. Et

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!(x+n)^2}.$$

Cette série vérifie le critère spécial des séries alternées, donc la somme est du signe de son premier terme, à savoir négatif. Donc S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Du critère spécial des séries alternées résulte l'encadrement de la somme par deux sommes partielles successives :

$$\forall x\geq0,\quad\frac1x-\frac{1}{x+1}\leq S(x)\leq\frac1x.$$

D'où $\lim_{0^+}S=+\infty$ et $\lim_{+\infty}S=0$

Remarque : on en tire aussi que $S(x)\sim\frac1x$ $(x\to0^+)$ car $xS(x)\to1$ $(x\to0^+)$, ce qui est demandé à la dernière question.

Autre méthode : $S(x)=\frac1x+\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$ et $\forall x>0$, $\forall n\geqslant1$, $|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{nn!}$, donc $\sum_{n\geqslant1}f_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, d'après le théorème de la double limite :

— d'une part, sa somme tend vers la limite finie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{nn!}$ quand x tend vers 0^+ et il en résulte que $\lim_{0^+}S=+\infty$;

— d'autre part, $\lim_{+\infty}S=0$.

(c)

$$\begin{aligned} xS(x) - S(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(x+n)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+1+n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(x+n)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(x+n)} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x+n)}{n!(x+n)} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

(d) De $xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e}$, on tire que :
- d'une part, $xS(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{e} + S(1)$ par continuité de S en 1, or $S(1) = 1 - \frac{1}{e}$, d'où $xS(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$, donc $S(x) \sim \frac{1}{x}$ $(x \to 0^+)$;
- d'autre part, $xS(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} + 0$ car $\lim_{+\infty} S = 0$, donc $S(x) \sim \frac{1}{xe}$ $(x \to +\infty)$.

89. RMS 2013 606 Mines Ponts PSI, RMS 2016 512 Mines Ponts PSI & RMS 2016 583 Mines Ponts PC

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n \colon x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{2x}{x^2+n^2}$. Montrer que la fonction $f \colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$. Étudier la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que la fonction f est continue mais que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Solution. —

Les fonctions f_n étant impaires, f l'est aussi.

- Pour $x = 0$, la série est nulle, donc convergente.
  Pour $t \neq 0$, on a $|\frac{2t}{n^2+t^2}| \sim \frac{2|t|}{n^2}$ quand $n \to +\infty$, qui est le terme général d'une série convergente, donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$.
- On fixe $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $\varphi_x \colon t \in [1, +\infty[\mapsto \frac{2x}{x^2+t^2}$ est continue et décroissante, d'où, en comparant série et inté grale : $\int_1^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$, soit
$$\pi - 2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 2\left[\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_{t=1}^{+\infty} \leqslant f(x) \leqslant 2\left[\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_{t=0}^{+\infty} = \pi.$$
  En passant à la limite quand x tend vers l'infini, on obtient $\lim_{+\infty} f = \pi$ et, par imparité, $\lim_{-\infty} f = -\pi$.
- Pour tout $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, en posant $c = \max\{|a|, |b|\}$, on a : $|\frac{2t}{n^2+x^2}| \leqslant \frac{2c}{n^2}$, la série de fonctions converge donc normalement sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- Mais cette série ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$: par comparaison à l'intégrale, $R_n(x) \geqslant \int_{n+1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{n+1}{x}$, donc
$$\|R_n\|_\infty \geqslant \sup_{x\in\mathbb{R}_+^*} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{n+1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$$
  Autre méthode : Chaque terme tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Si la convergence était uniforme, alors le théorème de la double limite permettrait de conclure que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Or on a prouvé que $f(x)$ tendait vers π. C'est absurde. Donc la convergence n'est pas uniforme.

90. RMS 2016 371 X ESPCI PC

Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n \colon x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-n^2 x}$.

(a) Montrer que la fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

(b) Étudier la limite de f en $+\infty$.

(c) Montrer que $\lim_{0^+} f = +\infty$. La série $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

91. RMS 2016 938 CCP PSI & RMS 2015 666 Mines Ponts PSI

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{-nx})$.

(a) Montrer que f est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

(b) Étudier la limite de f en $+\infty$.

(c) Étudier la limite de f en 0^+. (On pourra vérifier que $\forall t \in [0, 1],\ \ln(1 + t) \geqslant \frac{t}{2}$.)

92. RMS 2008 987 ENSAM PSI

Soient deux fonctions $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et g continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que :

$$n \int_0^1 f(t)g(nt)\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(0) \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

93. RMS 2015 1013 CCP PSI

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n}$.

Solution. — Commençons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par un changement de variable sur $nU_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$: on pose $u = x^n, \mathrm{d}u = nx^{n-1}\,\mathrm{d}x, x \mapsto x^n$ est $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ vers $[0,1]$. Alors

$$nU_n = \int_0^1 \frac{\sqrt[n]{u}}{1+u}\,\mathrm{d}u.$$

Appliquons le théorème de convergence dominée à nU_n.
- On a la convergence simple de la suite $(f_n : u \mapsto \frac{\sqrt[n]{u}}{1+u})$ vers la fonction *cpm* $f : u \mapsto \frac{1}{1+u}$ si $u \in]0,1]$ et 0 si $u = 0$.
- La domination suivante est satisfaite : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall u \in [0,1], |f_n(u)| \leqslant \frac{1}{1+u}$ avec $u \mapsto \frac{1}{1+u}$ continue, $\geqslant 0$, et intégrable sur $[0,1]$.

Par théorème de convergence dominée, on a donc $\lim_{n\to+\infty} nU_n = \int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u = [\ln(1+u)]_0^1 = \ln 2$, et on en déduit que

$$U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n}.$$

Autre méthode — Commençons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par une intégration par parties : $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^1 x\frac{nx^{n-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\left[x\ln(1+x^n)\right]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ car $0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$, d'où $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$.

94. RMS 2010 849 Centrale PSI

(a) Étudier la convergence de $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

(b) Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

95. RMS 2016 951 TPE PSI

Après avoir justifié l'existence de l'intégrale, montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}$.

96. RMS 2011 1150, CCP PC, RMS 2014 1262 Écoles des Mines PSI

Justifier l'existence de $I = \int_0^1 \frac{\ln t\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $I = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$.

97. RMS 2025 993 Mines-Ponts MP-MPI

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2^n x)}{2^n}$.
Montrer que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle n'est pas dérivable en 0.

98. B4 Centrale

(a) Montrer qu'il existe une unique fonction $f\ :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\forall x > 0,\ f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x^2}$.

(b) Montrer que cette fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ et intégrable sur $[1,+\infty[$. Calculer $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

2.4 Séries entières

99. RMS 2015 1009 ENSAM PSI

Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}^*}$ avec $a_1 \geqslant 1$. On pose $P_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n a_k x^k$.

(a) Montrer qu'il existe un unique $x_n \in [0,1]$ tel que $P_n(x_n) = 1$.

(b) Montrer que $P_{n+1}(x_n) \geq 1$. En déduire que la suite (x_n) est décroissante et qu'elle converge.

(c) On note $\ell = \lim x_n$ et on suppose que $\ell > 0$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur à ℓ.

100. RMS 2011 1092 CCP PSI

Déterminer, suivant $a \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière de terme général $\arctan(n^a)x^n$.

101. RMS 2013 1017 CCP PSI

(a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ et calculer $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ pour tout $x \in]-R,+R[$.

(b) Montrer que, pour $x \in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$, $\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$.

(c) Montrer que $\pi = 8\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(\sqrt{2}-1)^{2n+1}$.

(d) Majorer l'erreur commise en approchant π par la somme partielle d'ordre N de la série précédente.

102. RMS 2009 989 Centrale PSI

Soit (a_n) une suite de réels. On note R le rayon de convergence de la série de terme général $a_n x^n$ et R' celui de la série de terme général $\sin(a_n)x^n$.

Montrer que $R' \geqslant R$ et qu'il y a égalité si $R > 1$.

103. RMS 2015 749 Mines Ponts PC

Soit (a_n) une suite complexe. On suppose que $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, que $\sum a_{2n} z^n$ a un rayon de convergence $R_1 > 0$ et que $\sum a_{2n+1} z^n$ a un rayon de convergence $R_2 > 0$. Exprimer R en fonction de R_1 et R_2.

104. RMS 132-709 Mines-Ponts PSI 2021

On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R strictement positif.

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.

(b) On pose $b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}$. Montrer que la série entière $\sum b_n z^n$ a un rayon de convergence R' supérieur ou égal à 1. Puis prouver que $R' = \max(1, R)$.

105. RMS 2013 379 X ESPCI PC

Soient $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \prod_{k=1}^{n}(\frac{2k-1}{2k})$.

(a) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 1.

(b) Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-1, +1[$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f sur $]-1, +1[$.

(c) Calculer $f(x)$ pour tout $x \in]-1, +1[$.

Solution. —

(a) Par le critère de D'Alembert.

(b) D'après le théorème de dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, on a $\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = x f'(x)$. On remarque que $a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} a_n$ ou encore $2(n+1)a_{n+1} = 2na_n + a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En multipliant par x^n avec $|x| < 1$ et en sommant (les séries entières qui apparaissent ont toute 1 pour rayon de convergence), on obtient

$$2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = 2f'(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2xf'(x) + f(x).$$

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre

$$2(1-x)y' - y = 0.$$

(c) Les solutions sur $]-1,1[$ de cette équation différentielle sont les fonctions telles qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in]-1,1[$, $y(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{1-x}}$. Comme $y(0) = \alpha$ et comme $f(0) = a_0 = 1$, et comme $a_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on conclut que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Remarque : On vérifie en effet que $(1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(-x)^n$, avec

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right) = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = a_n.$$

106. RMS 2011 1145 CCP PC, RMS 2012 1333 CCP PC, RMS 2013 1062 CCP PC & RMS 2016 782 Centrale PSI

Mots-clés : nombre de dérangements

Soit $(d_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $d_0 = 1$, $d_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_{n+2} = (n+1)(d_{n+1} + d_n)$.

(a) Calculer d_2 et d_3. Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $\frac{n!}{3} \leqslant d_n \leqslant n!$ et en déduire le rayon de convergence R de la série entière de terme général $\frac{d_n}{n!} x^n$.

(b) Pour tout $x \in]-R,R[$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que $\forall x \in]-R,R[$, $(1-x)S'(x) = xS(x)$.

(c) En déduire une expression de $S(x)$ en fonction de x et exprimer d_n comme une somme en fonction de n.

107. RMS 2016 939 ENSEA PSI, RMS 2016 941 CCP PSI

Soit (a_n) dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_1 \geqslant a_0 > 0$ et $\forall n \geqslant 2$, $a_n = a_{n-1} + \frac{2}{n} a_{n-2}$.

(a) Montrer que la suite (a_n) est croissante et que la suite $(\frac{a_n}{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$

(b) Former une équation différentielle vérifiée par la somme et calculer cette somme dans le cas où $a_0 = a_1 = 1$.

108. RMS 2016 593 Mines Ponts PC, RMS 2013 607 Mines Ponts PSI, RMS 2014 770 Mines Ponts PC

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Soient $f\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$ et $g\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^n$.

(a) Montrer que la suite $(H_n - \ln n)$ est convergente.

(b) Montrer que les fonctions f et g sont définies sur $]-1,+1[$.

(c) Montrer que, pour tout $x \in]-1,+1[$, $f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.

(d) Montrer que $f(x) \sim g(x)$ $(x \to 1^-)$.

Solution. —

(a) Du théorème des accroissements finis, on tire l'encadrement $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$. On en déduit que la suite $(H_n - \ln n)$ est décroissante car $[H_{n+1} - \ln(n+1)] - [H_n - \ln n] = \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \leq 0)$. Or elle est aussi positive car, en sommant l'inégalité $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$ de $k=1$ à n, on obtient : $\ln(n+1) \leq H_n$. Donc elle converge.

(b) Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum (\ln n) x^n$. On vérifie que $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$ tend vers 1. Donc, par la critère de d'Alembert, $R = 1$.

$H_n - \ln n$ tend vers un réel γ, d'où $\frac{H_n}{\ln n} - 1$ tend vers 0, donc $H_n \sim \ln n$. On en déduit que la série entière $\sum H_n x^n$ a le même rayon de convergence $R = 1$ que $\sum (\ln n) x^n$.

(c) Si on pose $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $b_0 = 0$, $b_n = \frac{1}{n}$ si $n \in \mathbb{N}^*$ alors les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont toutes deux de rayon de convergence 1 et de sommes respectives sur $]-1,1[$ égales à $\frac{1}{1-x}$ et $-\ln(1-x)$. Par produit de Cauchy, il vient

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-x} \times (-\ln(1-x)) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

où $c_0 = a_0 b_0 = 0$ et si $n \geqslant 1$ $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$ d'où

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

(d) Comme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$, la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)$ est bornée par un certain M. Par suite,

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n \right| \leqslant M \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{Mx}{1-x} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{1-x}\right) \quad \text{quand } x \to 1^-.$$

D'où $f(x) - g(x) = o(f(x))$ $(x \to 1^-)$. Donc $f(x) \sim g(x)$ $(x \to 1^-)$.

109. RMS 2013 670 Mines Ponts PC, RMS 2006 1132 CCP PC, RMS 2011 1144 CCP PC, RMS 2013 1019 CCP PSI

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 (\frac{1+t^2}{2})^n \, \mathrm{d}t$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq \frac{1}{n+1}$ et étudier la limite de la suite (a_n).

Quel est l'ensemble de définition de la fonction $f\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$?

2.5 Équations différentielles & calcul différentiel

110. RMS 2014 1308 CCP PSI

Soit $(S)\left\{\begin{array}{l} x'(t) = y(t) - z(t) \\ y'(t) = z(t) - x(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t), \end{array}\right.$ avec $x(0) = 1,\ y(0) = z(0) = 0$.

(a) Montrer que la trajectoire de toute solution est incluse dans une sphère et dans un plan.

(b) Résoudre directement (S).

111. RMS 2010 1026 CCP PSI

Mots-clés : raccordement de solutions

Soit $(E) : (1 + x)y' - 2y = 0$.

(a) Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E). Donner une base de l'ensemble des solutions.

(b) Donner une base de l'ensemble des solutions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$

112. RMS 2013 921 Centrale PC

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(-x) = e^x$.

113. RMS 2016 525 Mines Ponts PSI

L'application $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $H(x, y) = \frac{x^4 y}{x^4+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $H(0, 0) = 0$, est-elle continue ? de classe $\mathcal{C}^1$?

114. RMS 2009 998 Centrale PSI

Trouver les extrema de $(x, y) \mapsto \sin(x) \sin(y) \sin(x + y)$ sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi,\ 0 \leqslant x + y \leqslant \pi\}$.

115. RMS 2016 612 Mines Ponts PC

Déterminer les solutions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ de l'équation $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x}$.

116. RMS 2013 396 X ESPCI PC

Mots-clés : accroissements finis

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable dont toutes les dérivées partielles sont bornées entre -1 et 1. Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \sqrt{n}\,\|x - y\|$.

117. RMS 2012 357 X ESPCI PC

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ différentiable telle que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|$. Montrer que f est injective. Et que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $df(x_0)$ est bijective.

118. RMS 2009 1062 Centrale PC

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ différentiable. On suppose que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \|x - y\|^2$. Montrer que f est constante.

119. RMS 2024 876 Mines Ponts MP MPI

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ différentiable telle que $\|f(x)\| \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $df(x)$ est surjective. Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|f(x) - a\|^2$.

(a) Montrer que la fonction g est différentiable et exprimer $dg(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Montrer que la fonction g admet un munimum global.

(c) En déduire que la fonction f est surjective.

SOLUTION. —

(a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$: pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $g(x+h) = \|f(x+h) - a\|^2 = \|f(x) + df(x) \cdot h + o(h) - a\|^2 = \|f(x) - a\|^2 + 2\langle f(x) - a|df(x) \cdot h\rangle + o(h)$, d'où g est différentiable en x et $dg(x)$ est l'application linéaire $h \mapsto 2\langle f(x) - a|df(x) \cdot h\rangle$.

(b) D'une part, $g(x) = \|f(x) - a\|^2 \geq (\|f(x)\| - \|a\|)^2$ d'après l'inégalité triangulaire inversée. Or $\|f(x)\|$ tend vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$ par hypothèse. D'où $g(x)$ tend vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$. Il existe donc $R > 0$, tel que $\|x\| > R \implies g(x) \geq g(0)$.

D'autre part, la fonction g est continue car différentiable. Et la boule fermée B de centre 0 et de rayon R est compacte. La fonction $g|_B$ est continue sur le compact B, elle possède donc un minimum global m. Et $m \leq g(0)$ car $0 \in B$. Donc m est le minimum global de g sur $\mathbb{R}^n$.

(c) Soit $a \in \mathbb{R}^n$: la fonction g est différentiable et elle possède un minimum global en un point x de l'ouvert $\mathbb{R}^n$, d'où $dg(x) = 0$. D'où $\langle f(x) - a|df(x) \cdot h\rangle = 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$. Or l'application $h \mapsto df(x) \cdot h$ est surjective par hypothèse, d'où $\langle f(x) - a|k\rangle$ pour tout $k \in \mathbb{R}^n$. D'où $f(x) - a = 0$. Donc f est surjective.

120. B1 Centrale

Soit $C = \left\{(x_1, \cdots, x_n) \in]0, +\infty[^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}$. Pour chaque extremum local de la fonction $C \to \mathbb{R},\ (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} x_i$, préciser si c'est un minimum ou un maximum, sa valeur, en quels points il est atteint et s'il est global.

3 Probabilités

121. RMS 2017 482 X ESPCI PC & RMS 2018 518 X ESPCI PC

On place aléatoirement $n \geqslant 3$ boules dans n urnes. Calculer la probabilité qu'une seule urne soit vide.

122. RMS 2017 900 Mines Ponts PC, RMS 2016 615 Mines Ponts PC

On lance deux dés équilibrés. Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires correspondant aux résultats des lancers des dés 1 et 2. On pose $X = \min\{U_1, U_2\}$ et $Y = \max\{U_1, U_2\}$.

(a) Déterminer $P(X \geq k)$ et $P(Y \geq k)$ pour chaque $k \in [\![1, 6]\!]$.

(b) Calculer XY en fonction de U_1 et U_2 et en déduire que $E(XY) = (\frac{7}{2})^2$.

Solution. — ▷ **Stratégie du max :** $(Y \leq k) = (U_1 \leq k) \cap (U_2 \leq k)$. Voir aussi l'exercice 133.

(a) La variable X est à valeurs dans $[\![1, 6]\!]$ et, pour $k \in [\![1, 6]\!]$, on a $(X \geqslant k) = (U_1 \geqslant k) \cap (U_2 \geqslant k)$. Par indépendance et équiprobabilité, on en déduit que $P(X \geqslant k) = [P(U_1 \geqslant k)]^2 = (\frac{6-k+1}{6})^2 = (\frac{7-k}{6})^2$.
De $(Y \geqslant k) = (U_1 \geqslant k) \cup (U_2 \geqslant k)$, on déduit que $P(Y \geqslant k) = P\left[(U_1 \geqslant k) \cup (U_2 \geqslant k)\right] = P(U_1 \geqslant k) + P(U_2 \geqslant k) - P\left[(U_1 \geqslant k) \cap (U_2 \geqslant k)\right] = P(U_1 \geqslant k) + P(U_2 \geqslant k) - P(X \geq k)$.

(b) On a $XY = U_1 U_2$ et, par indépendance, $E(U_1 U_2) = [E(U_1)]^2 = (\frac{7}{2})^2$.

123. RMS 2017 1353 CCP PSI

Deux joueurs jouent avec des pièces équilibrées. Ils lancent chacun n fois une pièce. Celui qui gagne est celui qui obtient le plus grand nombre de fois pile. Quelle est la probabilité qu'il y ait un gagnant ? On pourra utiliser (et éventuellement démontrer) l'égalité $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

124. RMS 2021 132 1190 CCP PSI 2021, RMS 2018 129 207 CCP PSI 2018

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes, de même loi et admettant une variance. On suppose que la variable aléatoire $Z = X + Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

(a) Déterminer l'espérance et la variance de X.

(b) Calculer la fonction génératrice de X sur $]0, 1[$.

(c) En déduire la loi de X.

125. RMS 2016 964 CCP PSI

On considère une urne contenant $n - 1$ boules noires et une boule blanche.

(a) On effectue une succession de tirages avec remise dans cette urne et on note T la variable aléatoire donnant le rang du premier tirage amenant la boule blanche. Donner les valeurs prises par T, sa loi, son espérance et sa variance.

(b) On effectue maintenant des tirages sans remise.

i. Soit X la variable aléatoire donnant le rang du premier tirage amenant la boule blanche. Donner les valeurs prises par X, sa loi, son espérance et sa variance.

ii. Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de boules noires restantes dans l'urne après le tirage de la boule blanche. Exprimer Y en fonction de X et n. Donner l'espérance de Y ainsi que sa variance.

126. RMS 2016 614 Mines Ponts PC

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Calculer $E(\frac{1}{X})$.

127. RMS 2017 1358 CCP PSI

Soit $n \geq 2$. On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On note X_n le rang du premier tirage où l'on obtient une boule différente de la première boule tirée.

(a) Établir la loi de la variable aléatoire X_n.

(b) Justifier l'existence de l'espérance de X_n et la calculer.

128. RMS 2016 967 ENSEA PSI

Soit X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que $E(|X-\lambda|) = 2e^{-\lambda}\frac{\lambda^{N+1}}{N!}$, avec $N = \lfloor \lambda \rfloor$.

129. RMS 2017 1357 CCP PSI

Dans un casino, une machine renvoie un entier naturel N non nul selon la loi de probabilité : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(N=n) = \frac{1}{2^n}$. Le joueur gagne N jetons si N est pair ; il perd N jetons si N est impair.

(a) Quelle est la probabilité de gagner ?

(b) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire G égale au gain algébrique du joueur.

130. RMS 2017 901 Mines Ponts PC

On lance une pièce qui a une probabilité p de donner pile. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux fois pile. Déterminer la loi de X et la fonction génératrice G_X de X. Calculer $E(X)$.

Solution. —

$$(X=n) = \bigcup_{k=1}^{n-1} \left[(X_1=0)\cap\cdots\cap(X_k=0)\cap(X_k=1)\cap(X_{k+1}=0)\cap\cdots\cap(X_{n-1}=0)\cap(X_n=1)\right],$$

où $(X_i=1)$ pour pile au i-ième coup (succès) et $(X_i=0)$ pour face au i-ième coup (échec). L'union est disjointe et les événements intersectés sont indépendants :

$$P(X=n) = (n-1)p^2q^{n-2}.$$

On en déduit la fonction génératrice de X : pour tout $t \in \left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$,

$$G_X(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(X=n)t^n = (pt)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(qt)^{n-1} = \frac{(pt)^2}{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(qt)^n\right) = \frac{(pt)^2}{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(qt)^n\right) = \frac{(pt)}{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{1-qt}\right)$$
$$= \left(\frac{pt}{1-qt}\right)^2.$$

Comme G_X est la somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{1}{q} > 1$, elle est dérivable en 1, donc X admet une espérance, donnée par $E(X) = G'_X(1) = 2f(1)f'(1)$, où $f(t) = \frac{pt}{1-qt}$. Donc $E(X) = \frac{2}{p}$.

131. RMS 2016 803 Centrale PSI

Trois individus jouent au ballon :
— si A possède la balle, il l'envoie à B avec probabilité $\frac{1}{3}$ et à C avec probabilité $\frac{2}{3}$,
— si B possède la balle, il l'envoie à A avec probabilité $\frac{1}{3}$ et à C avec probabilité $\frac{2}{3}$,
— si C possède la balle, il l'envoie à B avec probabilité $\frac{1}{3}$ et à A avec probabilité $\frac{2}{3}$.
On note A_n l'événement : le joueur A reçoit le ballon au n-ième lancer, et on définit de même B_n, C_n. Étudier la limite des suites $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$.

Solution. —

(a) La formule des probabilités totales donne $P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) = 0\cdot P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n) + \frac{2}{3}P(C_n)$. De même $P(B_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n) + 0\cdot P(B_n) + \frac{1}{3}P(C_n)$ et $P(C_{n+1}) = \frac{2}{3}P(A_n) + \frac{2}{3}P(B_n) + 0\cdot P(C_n)$. On obtient donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$X_{n+1} = MX_n, \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}.$$

La matrice M a pour polynôme caractéristique $X^3 - \frac{7}{9}X - \frac{2}{9} = (X-1)(X+\frac{1}{3})(X+\frac{2}{3})$, donc M est diagonalisable. Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base formée de vecteurs propres associés aux valeurs propres respectives $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{3}, \lambda_3 = -\frac{2}{3}$. Dans cette base, X_0 s'écrit : $X_0 = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3$. Par récurrence, $X_n = M^nX_0 = x\lambda_1^n\varepsilon_1 + y\lambda_2^n\varepsilon_2 + z\lambda_3^n\varepsilon_3 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\varepsilon_1$.

Reste à déterminer le scalaire x et le vecteur ε_1 :
— en résolvant le système d'équations, $MX = 1X$, on obtient que $\varepsilon_1 = (7\ 5\ 8)^T$ en est une solution ;
— en remarquant que, pour chaque n, la somme $P(A_n) + P(B_n) + P(C_n)$ des coordonnées de X_n veut 1, on conclut qu'il en de même en passant à la limite, d'où $x\cdot(7+5+8) = 1$.

Donc
$$P(A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{7}{20} \quad , \quad P(B_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{5}{20} \quad \text{et} \quad P(C_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{8}{20}.$$

132. RMS 2017 1355 CCP PSI

Mots-clés : la loi du 0 - 1 de Borel

Soit (A_n) une suite d'événements indépendants.

(a) Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Montrer que la probabilité qu'aucun des événements $A_n, \ldots, A_{n+p}$ ne se réalise est inférieure ou égale à $\exp(-\sum_{k=n}^{n+p} P(A_k))$.

(b) On suppose que la série de terme général $P(A_n)$ est divergente. Montrer qu'il est presque impossible qu'il n'y ait qu'un nombre fini d'entiers n pour lesquels A_n est réalisé.

(c) Montrer que, si la série de terme général $P(A_n)$ converge, alors il est presque certain qu'il n'y ait qu'un nombre fini d'entiers n pour lesquels A_n est réalisé.

133. RMS 2016 630 Mines Ponts PC, RMS 2017 914 Mines Ponts PC

Mots-clés : maximum de lois géométriques indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Soit $Z = \max(X, Y)$. Déterminer l'espérance de Z.

Solution. — ▷ **Stratégie du max :** $(Z \leq k) = (X \leq k) \cap (Y \leq k)$. Voir aussi l'exercice 122.

- La réunion disjointe $(X \leqslant n) = \cup_{k=1}^{n}(X = k)$ donne, en notant $q = 1 - p$:
$$\mathbb{P}(X \leqslant n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1} = p\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = 1 - q^n.$$
- Comme $Z = \max(X, Y)$, on a $(Z \leqslant n) = (X \leqslant n) \cap (Y \leqslant n)$ et comme X et Y sont indépendantes :
$$\mathbb{P}(Z \leqslant n) = \mathbb{P}(X \leqslant n)\mathbb{P}(Y \leqslant n) = \mathbb{P}(X \leqslant n)^2 = (1 - q^n)^2.$$
- Enfin la variable aléatoire est d'espérance finie car la série numérique $\sum P(Z \geqslant n)$ converge. Et
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(Z \geqslant n) = \sum_{n=1}^{+\infty}(1 - P(Z \leqslant n-1)) = \sum_{n=1}^{+\infty}(1-(1-q^{n-1})^2) = \sum_{n=0}^{+\infty}(1-(1-q^n)^2) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n}(2+q^n) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} q^{3n} = \frac{2}{1-q^2} + \frac{1}{1-q^3}.\end{aligned}$$

134. RMS 2017 192 ENS PC

(a) Pour tout $\lambda > 0$, soit X_λ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Soit $c > 0$: montrer que $P(|X_\lambda - \lambda| \geqslant c\lambda) \to 0$ lorsque $\lambda \to +\infty$.

(b) Soient, pour tout $\lambda > 0$, des variables aléatoires indépendantes $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$ suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Étudier l'espérance de $\Delta_\lambda = B_\lambda^2 - 4A_\lambda C_\lambda$.

(c) Soit $E_\lambda(c) = \big((|A_\lambda - \lambda| < c\lambda) \cap (|B_\lambda - \lambda| < c\lambda) \cap (|C_\lambda - \lambda| < c\lambda)\big)$. Montrer que $E_\lambda(\frac{1}{3}) \subset (\Delta_\lambda < 0)$.

(d) Déterminer la limite, lorsque $\lambda \to +\infty$, de la probabilité que le polynôme $A_\lambda X^2 + B_\lambda X + C_\lambda$ ait toutes ses racines réelles.

135. RMS 2017 1077 Centrale PSI

Mots-clés : marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^2$

On munit $\mathbb{R}^2$ de son repère orthonormé que l'on note $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Un marcheur, initialement en O, se déplace à chaque onstant n d'un pas dans l'une des quatre directions (nord, sud, est, ouest) de manière équiprobable. On note $A_n = (X_n, Y_n)$ sa position à l'instant n. On note aussi Z_n la distance du marcheur au point O à l'instant n.

(a) Déterminer l'espérance et la variance de X_n.

(b) Les deux variables aléatoires X_n et Y_n sont-elles indépendantes ? Déterminer leur covariance.

(c) Montrer que $E(Z_n) \leqslant \sqrt{n}$.

136. RMS 2024 172 ENS MP MPI

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes telles que $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis.

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Comparer $E(f(X))$ et $f(E(X))$.

(b) On dit que $X \leq_c Y$ si, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe, $E(f(X)) \leq E(f(Y))$.

  i. Donner un exemple de couple (X, Y) tel que $X \neq Y$ et $X \leq_c Y$.

  ii. Montrer que, si $X \leq_c Y$, alors $E(X) = E(Y)$ et $V(X) \leq V(Y)$.

Solution. —

(a) Les variables aléatoires X et $f(X)$ sont d'espérance finie car l'ensemble $X(\Omega)$ est fini.
D'après le théorème de tranfert, $E(f(X)) = \sum_{a \in X(\Omega)} P(X = a) f(a)$.
D'après l'inégalité de Jensen, $f(E(X)) = f(\sum_{a \in X(\Omega)} aP(X = a)) \leq \sum_{a \in X(\Omega)} P(X = a) f(a)$ car f est convexe, $\sum_{a \in X(\Omega)} P(X = a) = 1$ et $\forall a \in X(\Omega),\ P(X = a) \geq 0$.

(b) i. On pose $X = 0$ et Y suivant la loi $P(Y = 1) = \frac{1}{2} = P(Y = -1)$. Si f est convexe, alors $E(f(X)) = f(0) \leq \frac{1}{2} f(-1) + \frac{1}{2} f(+1)$.

  ii. Pour tout réel a, la fonction $x \mapsto ax$ est convexe, d'où $E(aX) \leq E(aY)$, donc $aE(X) \leq aE(Y)$. C'est vrai en particulier si $a = 1$ et si $a = -1$. Donc $E(X) = E(Y)$.
  Posons $m = E(X) = E(Y)$. La fonction $x \mapsto (x - m)^2$ est convexe, d'où $V(X) = E(f(X)) \leq E(f(Y)) = V(Y)$.

137. UPS 20240116

Mots-clés : inégalité de Cantelli

Soit X une variable aléatoire discrète réelle possédant une espérance $\mu = E(X)$ et une variance $\sigma^2 = V(X)$. Montrer que, pour tout $a > 0$, $P\big(X - \mu \geq a\big) \leq \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$. *(On pourra utiliser l'événement $\big(X - \mu + t)^2 \geq (a + t)^2\big)$, où $t \in \mathbb{R}_+$).*

Solution. — Soit $t \in \mathbb{R}_+$: l'événement $\big(X - \mu \geq a\big)$ est égal $\big(X - \mu + t \geq a + t\big)$ qui est inclus dans $\big(X - \mu + t)^2 \geq (a + t)^2\big)$.
Par croissance de la proba, $P\big(X - \mu \geq a\big) \leq P\big((X - \mu + t)^2 \geq (a + t)^2\big)$.
La v.a. $Y = (X - \mu + t)^2$ est positive, elle possède une espérance $E(Y) = \sigma^2 + t^2$ et le réel $(a + t)^2$ est strictement positif, d'où : $P\big((X - \mu + t)^2 \geq (a + t)^2\big) \leq \frac{E(Y)}{(a+t)^2}$ d'après l'inégalité de Markov. D'où $P\big(X - \mu \geq a\big) \leq \frac{\sigma^2 + t^2}{(a+t)^2}$ pour tout $t \geq 0$.
On dresse le tableau des variations de la fonction $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{\sigma^2 + t^2}{(a+t)^2}$: elle possède un minimum, atteint en $t_0 = \frac{\sigma^2}{a}$, et égal à $\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$. L'inégalité précédente est vraie pour tout $t \geq 0$, donc en particulier pour t_0.
Une seconde preuve : https ://les-mathematiques.net/vanilla/discussion/420931/inegalite-de-tchebytchev-cantelli

138. RMS 2023 920 Mines-Ponts MP MPI

Mots-clés : fonction indicatrice et inégalité de Paley-Zygmund

Soit X une v.a. positive possédant un moment d'ordre 2 tel que $E(X^2) \neq 0$. Soit $\lambda \in]0, 1]$. Montrer que :

$$(1 - \lambda)^2 \frac{E(X)^2}{E(X^2)} \leq P\big(X \geq \lambda E(X)\big) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

(On pourra commencer par montrer que $(1 - \lambda) E(X) \leq E\left(X 1_{\left(X \geq \lambda E(X)\right)}\right)$ en notant, pour tout événement A, la v.a. $1_A : \omega \mapsto 1$ si $\omega \in A, 0$ sinon.)

Solution. —
La seconde inégalité est l'inégalité de Markov dont les hypothèses sont vérifiées car la v.a. X est positive, elle possède une espérance (car elle possède un moment d'ordre 2) et le réel λ est strictement positif. Pour prouver la première inégalité, notons A l'événement $\big(X \geq \lambda E(X)\big)$. D'une part, $X = X 1_A + X 1_{\bar{A}}$, d'où $E(X) = E(X 1_A) + E(X 1_{\bar{A}})$ par linéarité de l'espérance. D'autre part, $X 1_{\bar{A}} = X 1_{\left(X < \lambda E(X)\right)} \leq \lambda E(X)$ car la v.a. X est positive. D'où $E(X 1_{\bar{A}}) \leq \lambda E(X)$ par croissance de l'espérance. Donc $(1 - \lambda) E(X) \leq E(X 1_A)$.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|E(X 1_A)| \leq \sqrt{E(X^2)} \sqrt{E(1_A^2)}$. D'une part, le réel $E(X 1_A)$ est positif car la v.a. X est positive par hypothèse. D'autre part, $1_A^2 = 1_A$ et $E(1_A) = P(A)$. D'où $E(X 1_A)^2 \leq E(X^2) P(A)$, ce qui prouve l'inégalité de Paley-Zygmund en divisant par $E(X^2)$ qui est strictement positif par hypothèse.

139. B3 X

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $p \in]0, 1[$.

(a) On suppose que $X \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ où $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$. Qu'en déduire sur la v.a. $X + Y$?

(b) On suppose que $X + Y \sim \mathcal{B}(n, p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Qu'en déduire sur les v.a. X et Y ?

SOLUTION. —

(a) (Voir ▷ **les exercices X.33, XIV.5&15**.) Les fonctions génératrices des v.a. X et Y sont définies par $G_X(t) = (pt+q)^{n_1}$ et $G_X(t) = (pt+q)^{n_2}$. Les v.a. X et Y sont indépendantes par hypothèse, d'où $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = (pt+q)^{n_1+n_2}$, donc $X+Y \sim \mathcal{B}(n_1+n_2, p)$.

(b) Les v.a. X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ car $X+Y$ l'est. Les fonctions génératrices G_X et G_Y sont donc polynomiales. Par indépendance des v.a. X et Y, leur produit est $G_X G_Y = G_{X+Y} : t \mapsto (pt+q)^n$ car $X+Y \sim \mathcal{B}(n,p)$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $n_1+n_2 = n$ et $G_X(t) = \alpha(pt+q)^{n_1}$ et $G_Y(t) = \frac{1}{\alpha}(pt+q)^{n_2}$. De plus $\alpha = 1$ car $G_X(1) = G_Y(1) = 1$ comme toute fonction génératrice. Donc X et Y suivent des lois binomiales, à moins que $n_1 = 0$ (resp. $n_2 = 0$) ; dans ce cas, $(X = 0)$ (resp. $(Y = 0)$) est l'événement presque certain.

Commentaires :

1. Laissez entrevoir à l'examinateur dès le début de l'oral ce que vous avez su faire ou non de tous les exercices, par des formules du type « J'ai résolu, sauf erreur, le deuxième exercice et les questions 1 et 3 du premier exercice. Dans la question 2, je n'ai pas encore conclu mais je pense à un équivalent ou, peut-être à une comparaison série-intégrale. » Cela permettra à l'examinateur de vous relancer sur une des pistes. Et vous évitera la frustration, pris par le temps, de devoir sortir de la salle en fin d'oral en donnant l'impression de ne pas avoir touché à une question que vous aviez pourtant abordée.
2. À l'oral, au contraire de l'écrit, on annonce le résultat ou la conclusion **puis** on en fait le calcul ou la preuve. Parce que :
   - il est chronophage de prouver un résultat erroné ;
   - l'examinateur vous dispensera parfois de développer le calcul d'un résultat, s'il constate que vous avez obtenu le bon résultat. Rien ne vous interdit d'ailleurs, après lui avoir exposé le résultat, de lui demander : « Voulez-vous que je détaille le calcul (ou la preuve) ? »
3. Ne pas dire « On voit que » et ne surtout pas dire « On voit directement que » ni « clairement » ni « facilement »ni « immédiatement ».
4. On évitera de répéter « du coup »ou « de base ».
5. Si vous écrivez gros, ou en désordre, divisez votre tableau dès le début de l'oral. N'oubliez pas d'appuyer sur la craie.
6. Une indication de l'examinateur n'est pas un piège, ne pas en tenir compte est une bêtise et les bêtises font perdre des points.
7. On ne se précipite pas pour répondre à une question de l'examinateur : « Il faut tourner sept fois sa langue dans sa bouche avant de parler. »
8. Faire un dessin :
   - s'il est question de projection orthogonale ou de Pythagore ;
   - si vous voulez décrire une rotation autour d'un axe (cela vaut mieux que de faire des gestes) ;
   - si vous voulez décrire les propriétés d'une fonction comme « $\forall x \in \mathbb{R},\ |\mathrm{Arctan}(x)| \leq \pi/2$ », « $\forall x \geq 0,\ \sin(x) \leq x$ », « $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$ »ou « $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geq 1+x$ »
   - si vous comparez série et intégrale ;
   - si vous voulez discuter la convergence d'une série entière en indiquant R et $-R$.
9. Ne pas dire « L'intégrale converge **quand** $x > 0$ » mais dire « **si** » ou « **si, et seulement si** ».
10. « Il faut que » ne signifie pas « il faut et il suffit que ».
11. $x < 0$ se dit « x est strictement inférieur à 0 »ou « x est strictement négatif » mais pas « x est inférieur à 0 »ni « x est négatif »
12. Ne pas dire « Chacun de ces événements est indépendant » mais « Ces événements sont indépendants » ou (ce n'est pas la même chose) « indépendants deux à deux ».
13. Ne pas dire : « ça converge »(l'intégrale, la suite, la série ?). Ne pas dire « La suite de fonctions converge »car une suite de fonctions converge simplement, voire uniformément. Ne pas dire « La série de fonctions converge »car une série de fonctions converge simplement voire uniformément voire normalement.
14. « L'union $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est disjointe »ne signifie pas « $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n \cap F_{n+1} = \emptyset$ »mais signifie « $\forall i \neq j,\ F_i \cap F_j$ », autrement dit « les événements sont disjoints deux à deux »et non pas « chaque événement est disjoint de son successeur ».
15. « Soit i est une valeur propre, soit $-i$ l'est »est une manière (maladroite) de dire que « Ou bien i est une valeur propre, ou bien $-i$ l'est ». À ne pas confondre avec « i est une valeur propre ou $-i$ l'est ».
16. On compare les fonctions (positives) et non les intégrales pour conclure sur la convergence voire sur la comparaison des intégrales. Idem pour les suites et les séries.
17. En proba : d'abord les événements (est-ce une intersection ? d'événements indépendants ? ou une union ? disjointe ?), ensuite leur proba.
18. Les « éléments propres » d'une matrice = ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.