Chapitre I Séries numériques

Table des matières

I.1 La nature d'une suite ou d'une série

Méthode 1 — *Comment montrer qu'une suite ou une série converge ou diverge.*

La suite u_n cv ou dv ?

- limite monotone — Si u_n est croissante et
  - majorée, alors u_n cv.
  - non majorée, alors $u_n \to +\infty$.
- suites adjacentes — Si $\begin{cases} u_n \text{ croît} \\ v_n \text{ décroît} \\ v_n - u_n \text{ tend vers } 0 \end{cases}$, alors u_n et v_n cv vers une même limite ℓ et $\forall n,\ u_n \leq \ell \leq v_n$.
- gendarmes — Si $\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \\ v_n \text{ et } w_n \text{ cv vers une même limite} \end{cases}$, alors u_n cv vers la même limite.

La série $\sum u_n$ cv ou dv ?

- Si la suite u_n ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ dv.
- si $u_n \geq 0$
  - Si $u_n \leq v_n$, alors : $\sum v_n$ cv $\Rightarrow \sum u_n$ cv.
  - Si $v_n = O(u_n)$, alors : $\sum u_n$ cv $\Rightarrow \sum v_n$ cv.
  - Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
  - D'Alembert — si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$ et
    - $\ell < 1$: alors $\sum u_n$ cv.
    - $\ell > 1$: alors $\sum u_n$ dv.
  - Comparer série et intégrale.
- si u_n change de signe
  - Si la série $\sum |u_n|$ cv, alors la série $\sum u_n$ cv.
  - Séries alternées.

EXERCICE 2 — *Les séries suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?*

1. $\sum \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$
2. $\sum \frac{1}{n^2-\sqrt{n}}$
3. $\sum \frac{1}{n\cos^2(n)}$
4. $\sum \frac{\ln n}{n^2}$
5. $\sum \frac{\sin n}{n^2}$

I.2 Comparer série et intégrale

MÉTHODE 3 — *Soit* $f\ :[0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue par morceaux et décroissante. Soit la suite* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *définie pour chaque* $k\in\mathbb{N}$ *par :* $u_k = f(k)$*. Pour chaque* $k\in\mathbb{N}$,

$$u_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq u_k.$$

Preuve — Pour tout $t\in[k,k+1]$, $\quad f(k+1)\leq f(t)\leq f(k)$. D'où (croissance de l'intégrale) :

$$u_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(k+1)\,dt \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq \int_k^{k+1} f(k)\,dt = u_k.$$

□

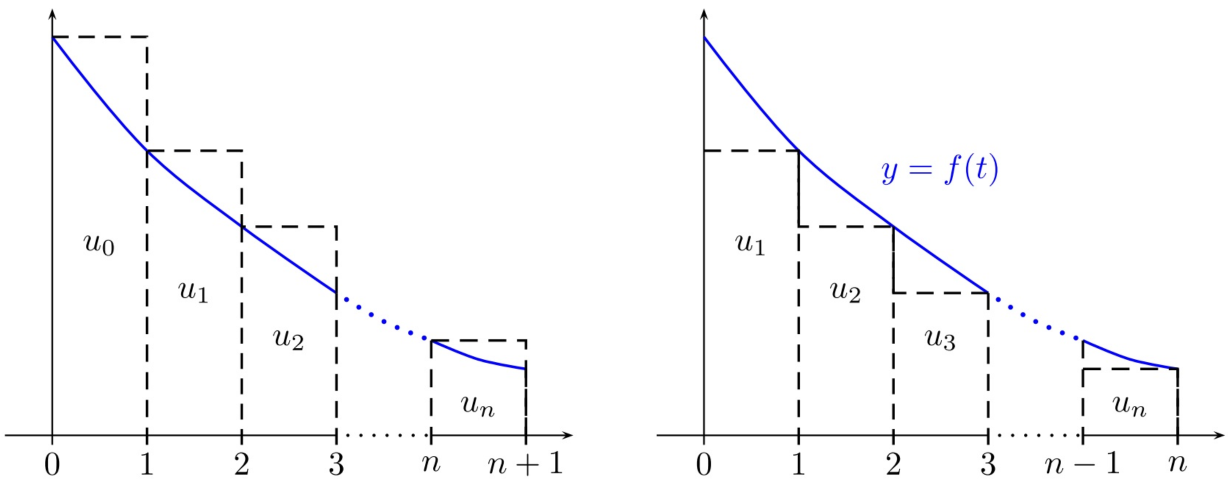

FIGURE I.1 – COMPARER UNE SÉRIE ET UNE INTÉGRALE

EXERCICE 4 (La série harmonique) — *Soit* $H_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Montrer que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ *diverge. Préciser ce résultat en démontrant que :*

$$\boxed{H_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n \qquad \text{et} \qquad H_n - \ln n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma}$$

où γ *est un réel appelé la* ***constante d'Euler****. Autrement dit :* $H_n = \ln n + o(\ln n) = \ln n + \gamma + o(1)$.

Exercice 5 — *Montrer que :* $\ln(n!) \sim n\ln(n)$.

Proposition 6 (**Critère de Riemann**)
Soit un réel α : la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Preuve — On compare série et intégrale :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}}_{S_n} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{1}{t^\alpha}\,dt.$$

— Si $\alpha = 1$, alors (comme dans l'exercice 4) $\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln(n)$, d'où $\ln(n+1) \leq S_n$, or $\ln(n+1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc S_n diverge.

— Si $\alpha \neq 1$, alors

$$\underbrace{\frac{1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}}{\alpha - 1}}_{A_n} \leq S_n \leq 1 + \underbrace{\frac{1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}}{\alpha - 1}}_{B_n}.$$

— Si $\alpha < 1$, alors $A_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc S_n diverge.

— Si $\alpha > 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$, d'où la suite S_n est majorée, or S_n est croissante (car $\frac{1}{n^\alpha}$ est positif), donc S_n converge.

□

I.3 Le reste d'une série convergente

Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la suite des sommes partielles d'une série $\sum u_n$. **Si cette série converge**, alors, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la quantité $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ est définie et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n + R_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle S_n est une valeur approchée de la somme exacte $\ell = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$. Et $|R_n| = |\ell - S_n|$ est l'erreur. Cette erreur tend vers zéro car $\lim_{n\to\infty} R_n = \ell - \lim_{n\to\infty} S_n = \ell - \ell = 0$.

Exercice 7 — *Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ de la série convergente $\sum \frac{1}{n^2}$. En comparant série et intégrale, montrer que : $\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}$. En déduire un équivalent de R_n.*

I.4 Les séries alternées

Théorème 8 (**Théorème des séries alternées**)
Si une suite (u_n) tend vers zéro en décroissant à partir d'un certain rang n_0, alors :

1. la série $\sum(-1)^n u_n$ est convergente ;
2. la somme $\ell = \sum_{k=n_0}^{\infty} (-1)^k u_k$ a le même signe que son premier terme $(-1)^{n_0} u_{n_0}$ et est encadrée par deux sommes partielles consécutives $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} (-1)^k u_k$ et S_{n+1} pour chaque $n \geq n_0$;

3. pour chaque $n \geq n_0$, le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k u_k$ a le même signe que le premier terme négligé $(-1)^{n+1}u_{n+1}$ et $|R_n| \leq u_{n+1}$.

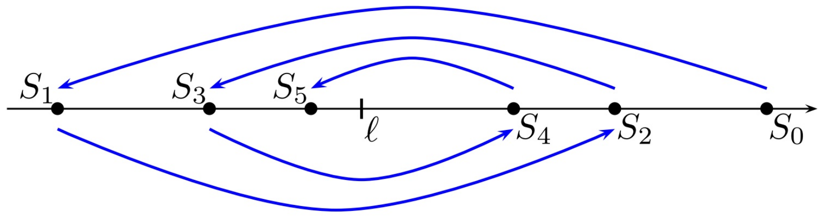

FIGURE I.2 – LA CONVERGENCE D'UNE SÉRIE ALTERNÉE

EXERCICE 9 — *On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Montrer que $\ln 2 - S_n = \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\, dt$. Étudier la limite de S_n, justifier l'existence de $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et déterminer la nature de la série $\sum R_n$.*

I.5 Le critère de d'Alembert

THÉORÈME 10 (**Critère de d'Alembert**)
Soit (u_n) une suite strictement positive telle que

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell.$$

1. Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Preuve — On va comparer la série $\sum u_n$ à une série géométrique $\sum \lambda^n$:

1. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell < 1$, alors il existe un réel $\lambda < 1$ tel que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda$ à partir d'un certain rang N.

   D'où, pour tout $n > N$:

$$\begin{aligned} u_n &= u_N \times \underbrace{\frac{u_{N+1}}{u_N} \times \cdots \times \frac{u_n}{u_{n-1}}}_{\leq \lambda^{n-N}} \\ &\leq u_N \lambda^{-N} \cdot \lambda^n. \end{aligned}$$

   Or la série $\sum \lambda^n$ converge car $\lambda < 1$. D'où la série $u_N\lambda^{-N} \sum \lambda^n$ converge, donc la série $\sum u_n$ converge aussi.
2. De même, si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell > 1$, alors il existe un réel $\lambda > 1$ tel que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \lambda$ à partir d'un certain rang N.

   D'où, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N\lambda^{-N} \cdot \lambda^n$. Or la série $\sum \lambda^n$ diverge car $\lambda > 1$. Donc la série $\sum u_n$ diverge aussi.

□

REMARQUE 11 — *Si $\ell = 1$, alors le critère ne permet pas de conclure (en effet $\sum \frac{1}{n}$ diverge tandis que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge).*

EXERCICE 12 — *Pour quelles valeurs du réel a les séries*

$$\sum \frac{a^n}{n!} \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{a^n}{n}$$

convergent-elles ?

I.6 Sommer les $\sim$, o, O

LEMME 13
Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que la suite (v_n) est positive.

1. Si $\sum v_n$ converge et $u_n = O(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument et $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p = O\left(\sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p\right)$.
2. Si $\sum v_n$ diverge et $u_n = O(v_n)$, alors $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} u_p = O\left(\sum_{p=0}^{n} v_p\right)$.
3. De même en remplaçant O par o ou par $\sim$.

Preuve —

1. Si $u_n = O(v_n)$ alors il existe un rang n_0 et une constante K tels que $\forall n \geq n_0, \quad |u_n| \leq K|v_n|$. De plus, la suite (v_n) est positive, d'où $|u_n| \leq K v_n$. Or la série $\sum v_n$ converge, d'où $\sum |u_n|$ converge aussi, donc la série $\sum u_n$ converge absolument. Les restes
$$\widehat{U}_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p \qquad \text{et} \qquad \widehat{V}_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p$$
sont donc définis. De $|u_n| \leq K v_n$, on déduit que $\left|\widehat{U}_n\right| \leq \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} |u_p| \leq K\widehat{V}_n$ à partir du rang n_0, donc $\widehat{U}_n = O(\widehat{V}_n)$.
2. On utilise le même n_0 et on note les sommes partielles $U_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} u_p$ et $V_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} v_p$. La suite V_n tend vers $+\infty$, d'où il existe un rang $n_1 \geq n_0$ tel que $\quad \forall n \geq n_1, \quad |U_{n_0}| \leq K V_n$.
D'où $\forall n \geq n_1, \ |U_n| = |U_{n_0} + (U_n - U_{n_0})| \leq |U_{n_0}| + |U_n - U_{n_0}| \leq |U_{n_0}| + K(V_n - V_{n_0}) \leq 2KV_n$. Donc $U_n = O(V_n)$.
3. Si $u_n = o(v_n)$, alors on remplace la constante K ci-dessus par ε, pour tout $\varepsilon > 0$.
On remarque que $u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$ et on utilise la propriété déjà démontrée pour les o.

□

Le théorème suivant est juste un cas particulier du lemme précédent :

THÉORÈME 14
Soient (u_n) et (v_n) deux suites positives et équivalentes :
— ou bien leurs séries **divergent** et leurs **sommes partielles** sont équivalentes ;
— ou bien leurs séries **convergent** et leurs **restes** sont équivalents.

EXERCICE 15 —

1. *Montrer, en appliquant le théorème aux deux suites* $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ *et* $v_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$, *que la série* $\sum \dfrac{1}{n^2}$ *converge et que son reste est équivalent à* $\dfrac{1}{n}$. *(On avait déjà obtenu ces résultats à l'exercice 7 en comparant série et intégrale.)*
2. *Montrer, en appliquant le théorème aux deux suites* $u_n = \dfrac{1}{n}$ *et* $v_n = \ln(n) - \ln(n-1)$, *que la série* $\sum \dfrac{1}{n}$ *diverge et que ses sommes partielles sont équivalentes à* $\ln(n)$. *(On a déjà obtenu ces résultats à l'exercice 4 en comparant série et intégrale.)*

Corollaire 16 (**Lemme de Cesàro**)
Si une suite (u_n) converge vers un réel ℓ, alors elle converge en moyenne vers ℓ :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \implies \frac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Preuve — Dans le cas particulier où $\ell = 0$: $u_n = \underset{n\to\infty}{o}(1)$, or 1 est positif et la série $\sum 1$ diverge, d'où la somme partielle $u_0+u_1+\cdots+u_n = S_n$ est un o de la somme partielle $1+1+\cdots+1 = n+1$. Donc la moyenne $\dfrac{S_n}{n+1}$ tend vers 0 qui est égal à ℓ.

Le cas général se ramène au cas particulier, appliqué à la suite $u_n - \ell$. $\square$

Exercice 17 — *La réciproque du lemme de Cesàro est-elle vraie ? Montrer que le lemme de Cesàro reste vrai si ℓ vaut $+\infty$ ou $-\infty$.*

I.7 Développements asymptotiques

Nous savons que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente et nous connaissons (exercice 4) un équivalent de ses sommes partielles :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n.$$

Nous allons préciser ce résultat en démontrant les formules suivantes :

$$\begin{aligned} H_n &= \ln n + o(\ln n) && (1)\\ &= \ln n + \gamma + o(1) && (2)\\ &= \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) && (3)\\ &= \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) && (4) \end{aligned}$$

où γ est un réel appelé la constante d'Euler.

Ces formules sont des exemples de **développements asymptotiques**, chaque développement étant plus poussé, donc plus précis, que le précédent. Pour obtenir ces développements, on utilise le théorème 14 et la remarque suivante.

Remarque 18 (**Séries télescopiques**) — *À une suite (u_n), on associe sa série télescopique $\sum(u_n - u_{n-1})$:*

- *la somme partielle $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1})$ de la série télescopique est égale à $u_n - u_0$ (et, par conséquent, la suite et sa série télescopique ont toujours la même nature) ;*
- *si u_n tend vers zéro, alors le reste $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}(u_k - u_{k-1})$ de la série télescopique est égal à $-u_n$.*

Preuve — *Soit $n \geq 1$: $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n}(u_p - u_{p-1}) = u_n - u_0$ (télescope) et*

$$R_n = \sum_{p=n+1}^{\infty}(u_p - u_{p-1}) = \lim_{N\to\infty}\sum_{p=n+1}^{N}(u_p - u_{p-1}) = \lim_{N\to\infty}(u_N - u_n) = -u_n \text{ si } \lim_{N\to\infty} u_N = 0.$$ $\square$

(1) La première formule est juste une réécriture de $\sim$ avec un o :

$$H_n \sim \ln n \iff H_n = \ln n + o(\ln n).$$

(2) Nous avons déjà montré (exercice 4) que la suite $H_n - \ln n$ converge. Voici une autre preuve, utilisant la série télescopique : la suite $u_n = H_n - \ln n$ a la même nature que la série $\sum(u_n - u_{n-1})$. Or

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= [H_n - \ln n] - [H_{n-1} - \ln(n-1)] = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} + \left[-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}. \end{aligned}$$

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, d'où la série $\sum(u_n - u_{n-1})$ converge aussi, donc la suite u_n converge. Soit γ sa limite :

$$H_n - \ln(n) \longrightarrow \gamma \iff H_n = \ln n + \gamma + o(1).$$

(3) Soit $u_n = H_n - \ln n - \gamma$. La série $\sum(u_n - u_{n-1})$ converge car $u_n - u_{n-1} \sim -\frac{1}{2n^2}$, on en déduit l'équivalence des restes :

$R_n \sim -\frac{1}{2} \cdot \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \sim -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$ (par comparaison série-intégrale), d'où $\quad u_n \sim \frac{1}{2n}$:

$$H_n - \ln n - \gamma \sim \frac{1}{2n} \iff H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(4) On cherche un équivalent de $u_n = H_n - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n}$. La série $\sum(u_n - u_{n-1})$ est convergente car :

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \text{(calculer le D.L.)} \\ &\sim \frac{1}{6n^3}, \quad \text{d'où (par équivalence des restes)} \\ R_n &\sim \frac{1}{6} \cdot \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p^3} \\ &\sim \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2n^2} \quad \text{(comparer série et intégrale).} \end{aligned}$$

D'où $\quad u_n \sim -\frac{1}{12n^2}, \quad$ donc $\quad H_n - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n} \sim -\frac{1}{12n^2}$.

Proposition 19 (**Formule de Stirling**)

$$\boxed{n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$$

Preuve — On part de l'équivalent $\ln(n!) \sim n \ln n$ prouvé à l'exercice 5 puis on pousse le développement asymptotique : $\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + K + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Pour déterminer la constante K, on utilise les intégrales de Wallis. □

Exercice 20 — *On lance $2n$ fois une pièce. Quelle est la probabilité u_n d'obtenir autant de* Pile *que de* Face *? Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini.*