Test de mathématiques

Durée : 2 heures. Les calculatrices sont interdites.

On attachera un grand soin à la rédaction. En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.

On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1. Soit $\mathcal{B} = (i, j, k, \ell)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E. Soit

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, d'un endomorphisme f.

1. Montrer que f est un projecteur.
2. Déterminer sa trace et en déduire son rang.
3. Déterminer une base du noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f.
4. Déterminer une base de l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f.
5. Montrer que ce projecteur est une projection orthogonale.
6. Construire une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exercice 2. Soient un réel $a \in]0, \pi[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \cos^{n-1}(a) \cdot \cos\left[(n+1)a\right].$$

1. Montrer que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
2. Montrer que la partie réelle du nombre complexe $\dfrac{\mathrm{e}^{i2a}}{1 - \cos(a)\mathrm{e}^{ia}}$ est -1. Quelle est sa partie imaginaire ?
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Exercice 3. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante et tend vers $+\infty$.
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k = \frac{\ln(u_k)}{2^k}$ est bien défini et $x_{k+1} - x_k = \frac{\ln(1+\frac{1}{u_k})}{2^{k+1}}$.
3. Soit $p > n$. Montrer que $0 \leq x_p - x_n \leq \frac{1}{2^n u_n}$.
4. On fixe n. En déduire que la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel λ tel que $0 \leq \lambda - x_n \leq \frac{1}{2^n u_n}$.
5. Montrer que u_n est équivalent à $\exp(\lambda 2^n)$ quand n tend vers ∞.

Exercice 4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. On dit qu'il vérifie la propriété $(\star)$ si

$$P + 1 \text{ est divisible par } (X-1)^4 \text{ et } P - 1 \text{ est divisible par } (X+1)^4.$$

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme de degré 7 vérifiant $(\star)$. Quel est ce polynôme ? (On pourra commencer par étudier le polynôme P'.)
2. En déduire tous les polynômes vérifiant $(\star)$.