Corrigé du test de mathématiques

Exercice 1. Soit $\mathcal{B} = (i, j, k, \ell)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E. Soit

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, d'un endomorphisme f.

1. Montrer que f est un projecteur.
2. Déterminer sa trace et en déduire son rang.
3. Déterminer une base du noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f.
4. Déterminer une base de l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f.
5. Montrer que ce projecteur est une projection orthogonale.
6. Construire une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est diagonale.

---

1. On calcule : $A^2 = A$, d'où $f \circ f = f$, donc l'endomorphisme f est un projecteur.
2. $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = 2$. Or f est un projecteur, d'où $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{tr}(f) = 2$.
3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, d'un vecteur $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(x) = 0_E \iff AX = 0 \quad &\iff \begin{cases} x - y + z - t = 0 & L_1 \\ -x + 3y - z - t = 0 & L_2 \\ -x - y - z + 3t = 0 & L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - y + z - t = 0 & L_1 \\ y - t = 0 & \frac{L_1+L_2}{2} = -\frac{L_1+L_3}{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = -x + 2y \\ t = y \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   En posant $e_1 = i - k$ et $e_2 = j + 2k + \ell$, la famille (e_1, e_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

   Autre méthode : d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}(f) = 4$. Or $\mathrm{rg}(f) = 2$ d'après la question précédente, d'où $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$. Or la famille $(i - k, j + 2k + \ell)$ est libre et ses vecteurs appartiennent au noyau de f, donc c'est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
4. La famille $(f(i), f(j), f(k), f(\ell)) = (i - j + k - \ell, -i + 3j - k - \ell, i - j + k - \ell, -i - j - k + 3\ell)$ est génératrice du *sev* $\mathrm{Im}(f)$. On la libère : en posant $e_3 = i - j + k - \ell$ et $e_4 = -i + 3j - k - \ell$, la famille (e_3, e_4) est libre et génératrice du *sev* $\mathrm{Im}(f)$, c'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

   Autre méthode : les vecteurs $f(i) = i - j + k - \ell$ et $f(j) = -i + 3j - k - \ell$ appartiennent à $\mathrm{Im}(f)$ et ne sont pas liés. Or $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$. Donc $(i - j + k - \ell, -i + 3j - k - \ell)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
5. L'endomorphisme f est le projecteur sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$. Or les *sev* $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont orthogonaux car les vecteurs e_1 et e_2 sont orthogonaux aux vecteurs e_3 et e_4 car $\langle e_1, e_3\rangle = \langle e_1, e_4\rangle = \langle e_2, e_3\rangle = \langle e_2, e_4\rangle = 0$. Donc f est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(f)$.

6. On orthonormalise la base (e_1, e_2) de Ker$f$ grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt pour obtenir la base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (\frac{i-k}{\sqrt{2}}, \frac{i+j+k+\ell}{2})$ du noyau.

   De même, $(\varepsilon_3, \varepsilon_4) = (\frac{i-j+k-\ell}{2}, \frac{j-\ell}{\sqrt{2}})$ est une base orthonormée de l'image.

   La base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ est orthonormée car les *sev* $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonaux. Et, dans cette base, la matrice de f est $\mathrm{diag}(0, 0, 1, 1)$.

Exercice 2. Soient un réel $a \in]0, \pi[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \cos^{n-1}(a) \cdot \cos\left[(n+1)a\right].$$

1. Montrer que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
2. Montrer que la partie réelle du nombre complexe $\dfrac{\mathrm{e}^{i2a}}{1-\cos(a)\mathrm{e}^{ia}}$ est -1. Quelle est sa partie imaginaire ?
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

---

1. La série $\sum u_n$ est absolument convergente car :
   — pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \leq |\cos a|^{n-1}$;
   — la série $\sum |\cos a|^{n-1}$ converge car c'est une série géométrique de raison $|\cos a|$ strictement inférieure à 1 car $a \in]0, \pi[$.
2. $\mathrm{e}^{i2a} \cdot \frac{1}{1-\cos(a)\mathrm{e}^{ia}} = \mathrm{e}^{i2a} \cdot \frac{1}{\sin^2 a - i \sin a \cos a} = \mathrm{e}^{i2a} \cdot \frac{1}{-i \cdot \sin a \cdot \mathrm{e}^{ia}} = \frac{i\mathrm{e}^{ia}}{\sin a} = \frac{-\sin a + i \cos a}{\sin a} = -1 + i\frac{\cos a}{\sin a}$. Donc la partie réelle est -1 et la partie imaginaire $\frac{\cos a}{\sin a}$.
3. La série $\sum u_n$ converge car elle converge absolument d'après la première question.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathrm{Re}\left(\cos^{n-1}(a)\mathrm{e}^{i(n+1)a}\right)$. D'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \cos^{n-1}(a)\mathrm{e}^{i(n+1)a}\right)$.

   Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos^{n-1}(a)\mathrm{e}^{i(n+1)a} = \mathrm{e}^{i2a} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos a \mathrm{e}^{ia}\right)^{n-1} = \mathrm{e}^{i2a} \cdot \frac{1}{1-\cos(a)\mathrm{e}^{ia}}$ dont la partie réelle est -1 d'après la question précédente. Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = -1$.

Exercice 3. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante et tend vers $+\infty$.
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k = \frac{\ln(u_k)}{2^k}$ est bien défini et $x_{k+1} - x_k = \frac{\ln(1+\frac{1}{u_k})}{2^{k+1}}$.
3. Soit $p > n$. Montrer que $0 \leq x_p - x_n \leq \frac{1}{2^n u_n}$.
4. On fixe n. En déduire que la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel λ tel que $0 \leq \lambda - x_n \leq \frac{1}{2^n u_n}$.
5. Montrer que u_n est équivalent à $\exp(\lambda 2^n)$ quand n tend vers ∞.

---

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2$ est positif, donc la suite (u_n) est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, elle possède donc une limite : ou bien égale à $+\infty$, ou bien égale à un réel ℓ. Dans le second cas, $\ell = \ell + \ell^2$, d'où $\ell = 0$: c'est absurde car $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_0$, d'où $\ell \geq u_0$ (car les inégalités larges passent à la limite), d'où $\ell > 0$. La suite (u_n) tend donc vers $+\infty$.
2. La suite (x_k) est bien définie car $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \geq u_0$, d'où $u_k > 0$, donc $\ln(u_k)$ est défini. Soit $k \in \mathbb{N}$: $x_{k+1} - x_k = \frac{\ln(u_{k+1})}{2^{k+1}} - \frac{\ln(u_k)}{2^k} = \frac{\ln(u_k+u_k^2)}{2^{k+1}} - \frac{\ln(u_k)}{2^k} = \frac{\ln((u_k(1+u_k))}{2^{k+1}} - \frac{\ln(u_k)}{2^k} = \frac{\ln(u_k)}{2^{k+1}} + \frac{\ln(1+u_k)}{2^{k+1}} - \frac{\ln(u_k)}{2^k} = \frac{\ln(1+u_k)}{2^{k+1}} - \frac{\ln(u_k)}{2^{k+1}} = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{u_k}\right)}{2^{k+1}}$.
3. Soit $p > n$: $x_p - x_n = \sum_{k=n}^{p-1}(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=n}^{p-1} \frac{\ln(1+\frac{1}{u_k})}{2^{k+1}}$. Or $0 \leq \ln(1+\frac{1}{u_k}) \leq \frac{1}{u_k}$: à gauche car $u_k > 0$ et à droite par concavité de la fonction ln. D'où $0 \leq x_p - x_n \leq \sum_{k=n}^{p-1} \frac{1}{2^{k+1}u_k}$. De plus $\frac{1}{u_k} \leq \frac{1}{u_n}$ pour tout $k \in [\![n, p-1]\!]$ car la suite (u_k) est croissante. Donc $0 \leq x_p - x_n \leq \frac{1}{u_n}\sum_{k=n}^{p-1} \frac{1}{2^{k+1}}$. Or $\sum_{k=n}^{p-1} \leq \frac{1}{2^{k+1}} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2^n}$. Donc $0 \leq x_p - x_n \leq \frac{1}{2^n u_n}$.

4. La suite (x_p) est majorée car, pour tout $p > n$, $x_p \leq x_n + \frac{1}{2^n u_n}$. Et elle est croissante car $x_{k+1} - x_k = \frac{\ln(1+\frac{1}{u_k})}{2^{k+1}} \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc elle est convergente. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ sa limite : $0 \leq \lambda - x_n \leq \frac{1}{2^n u_n}$ car les inégalités larges passent à la limite $p \to \infty$.
5. En multipliant les inégalités de la question précédente par 2^n (qui est positif), on obtient $0 \leq \lambda 2^n - \ln(u_n) \leq \frac{1}{u_n}$ et, parce que l'exponentielle est croissante : $1 \leq \frac{\exp(\lambda 2^n)}{u_n} \leq \exp\left(\frac{1}{u_n}\right)$. Les deux gendarmes tendent vers 1 (car u_n tend vers $+\infty$), d'où $\frac{\exp(\lambda 2^n)}{u_n}$ tend vers 1 d'après le théorème des gendarmes. Donc $u_n \sim \exp(\lambda 2^n)$.

Exercice 4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. On dit qu'il vérifie la propriété $(\star)$ si

$$P + 1 \text{ est divisible par } (X-1)^4 \text{ et } P - 1 \text{ est divisible par } (X+1)^4.$$

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme de degré 7 vérifiant $(\star)$. Quel est ce polynôme ? (On pourra commencer par étudier le polynôme P'.)
2. En déduire tous les polynômes vérifiant $(\star)$.

---

1. Il existe $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X)+1 = (X-1)^4 Q(X)$. D'une part, on dérive : $P'(X) = 4(X-1)^3 Q(X) + (X-1)^4 Q'(X) = (X-1)^3 \left[4Q(X) + (X-1)Q'(X)\right]$. Donc $(X-1)^3$ divise $P'(X)$. D'autre part, on évalue en 1 : $P(1)+1 = (1-1)^4 Q(1) = 0$. Donc $P(1) = -1$.

   Analyse — Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 7. On suppose que P vérifie $(\star)$. Alors P' est divisible par $(X-1)^3$ et $(X+1)^3$ et donc par $(X^2-1)^3$. Or P' est de degré 6, d'où $\exists a \in \mathbb{R},\ P' = a(X^2-1)^3$ et, en développant puis intégrant : $\exists b \in \mathbb{R},\ P = a\left(\frac{1}{7}X^7 - \frac{3}{5}X^5 + X^3 - X\right) + b$. De plus $P(1) = -1$ et $P(-1) = 1$, donc $b = 0$ et $a = \frac{35}{16}$.

   Synthèse — On vérifie par le calcul que ce polynôme satisfait les propriétés $(\star)$.
2. Notons P_0 la solution trouvée à la question précédente. Si un polynôme P est une solution de $(\star)$ alors $P - P_0$ est divisible par $(X^2-1)^4$. Réciproquement : s'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = P_0 + (X^2-1)^4 Q$, alors P est une solution de $(\star)$.

   Donc un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est une solution de $(\star)$ si, et seulement si : $\exists Q \in \mathbb{R}[X],\ P = P_0 + (X^2-1)^4 Q$.