

Corrigé de l'exo 1 du TD 1

Hyp $\frac{0}{1}$

$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ qui ne change pas de signe
 or $\sum \frac{1}{n}$ diverge par critère de Riemann ($\lambda = 1$)
 donc la série $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge

APCR à
cause du
grand O.

2. Sei $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n \cdot n^{\frac{1}{2} \ln n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2} \ln n + 1}} = \frac{1}{e^{\left(\frac{1}{2} + 1\right) \ln(n)}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\ln(n)}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\ln(n)}{n} + O\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right)}} \geq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{2} \geq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

donc par comparaison $\sum \frac{1}{n^{1/2n}}$ diverge

$$\begin{aligned} 3. \text{ Let } n \in \mathbb{N}_s^* \left(\frac{n}{n+1} \right)' &= e^{n(\ln(n) - \ln(n+1))} \\ &= e^{n(\ln(n) - \ln(n+1 + \frac{1}{n}))} \\ &= e^{-n \ln(1 + \frac{1}{n})} \end{aligned}$$

$$\text{or } \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{n}\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

donc $e^{-n(n(1 + \frac{1}{n}))} = e^{-n} (1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc la série $\sum (\frac{n}{n+1})^n$ diverge grossièrement

Qu'on a
incapable de penser
le 54

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$\sum \frac{n^{200}}{e^n} = \frac{n^{200}}{e^n} \cdot \frac{1}{n^2}$ donc $\frac{n^{200}}{e^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car $\frac{n^{200}}{e^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

et $\frac{1}{n^2}$ ne change pas de signe

donc la série $\sum \frac{n^{200}}{e^n}$ converge

pour intégrer

est continue et

5. Soit $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$; soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{h \ln(h)} dh = \frac{1}{h \ln(h)} \Big|_k^{k+1} = \frac{1}{h \ln(h)} \Big|_{n-1}^n$$

car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ décroît

donc $\sum_{n=3}^{n+1} \frac{1}{k(nk)} \leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{k(nk)} \leq \frac{1}{k} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{nk}$ or pas très lisible
donc $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) \leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{k(nk)} \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))$
or $\ln(\ln(n+1)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ donc par comparaison, la série
 $\sum \frac{1}{nk(nk)}$ diverge

Oni misivante

Q1

soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$b - \frac{1}{\ln(n)} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \ln(k)} \geq \frac{1}{n \ln(n)} > 0 \text{ car } \forall n \in \mathbb{N}^* \sum_{k=1}^n \ln(k) \leq n \ln(n) = \sum_{k=1}^n \ln(n)$$

or $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge d'après 5 - donc la série

$$\sum \frac{1}{\ln(n)} \text{ diverge}$$

$$\ln(n^{1/2}) = \frac{1}{2} \ln n = \ln(\sqrt{n}) \neq \sqrt{\ln n}$$

Calcul

7. soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$e^{-\sqrt{n \ln(n)}} \times e^{-\ln(n)^{3/2}} = \frac{1}{n^{3/2}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{3/2}$$

d'après le critère de Riemann, la série $\sum e^{-\sqrt{n \ln(n)}} = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge

8. soit $n \geq 2$

$$\frac{n}{(\ln(n))^n} = \frac{n}{e^{n \ln(\ln(n))}} = \frac{n^3}{e^{n \ln(n)}} \frac{1}{n^2}$$

Soit $n > e$
 $\ln(\ln(n)) > 1$

donc $n \ln(\ln(n)) > n$

donc par croissance de l'exponentielle, $e^{n \ln(\ln(n))} > e^n$

donc $\frac{1}{e^{n \ln(\ln(n))}} \leq \frac{1}{e^n}$ donc $0 \leq \frac{n^3}{e^{n \ln(n)}} \leq \frac{n^3}{e^n}$

Utilise $>$, car:

$>$ est inutile ici
 est arrivé car, pour affirmer que $\square$, tu as besoin de la stricte $>$ de exp

donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\frac{n^3}{e^{n \ln(n)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

donc $\frac{n}{(\ln(n))^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\frac{1}{n^2}$ ne change

Q2

pas de signe,

d'après le critère de Riemann, la série $\sum \frac{n}{(\ln(n))^n}$ converge

9. soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\frac{1}{n} - 1\right)^n = \left(\frac{1-n}{n}\right)^n = \frac{(1-n)^n}{n^n} = (-1)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

Or $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1} \neq 0$

Donc $\left(\frac{1}{n} - 1\right)^n$ ne tend pas vers 0.

Donc la série $\sum \left(\frac{1}{n} - 1\right)^n$ diverge grossièrement.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
 (n \sin(\frac{1}{n}))^n &= (n(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + O(\frac{1}{n^5})))^n \\
 &= (1 - \frac{1}{6n^2} + O(\frac{1}{n^4}))^n \\
 &= e^{n(\frac{1}{6n^2} + O(\frac{1}{n^4}))} \\
 &= e^{-\frac{1}{6n} + O(\frac{1}{n^3})} \\
 &= 1 - \frac{1}{6n} + O(\frac{1}{n^2}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1
 \end{aligned}$$

Le nombre des 2 ?

donc la série $\sum (n \sin(\frac{1}{n}))^n$ diverge grossièrement

oui

11. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 \sin(\pi \sqrt{n^2+2}) &= \sin(\pi n \sqrt{1+\frac{2}{n^2}}) \\
 &= \sin(\pi n (\frac{1}{n} (1 + \frac{1}{n^2})) \\
 &= \sin(\pi n (\frac{1}{n} (\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^3})))) \\
 &= \sin(\pi n (\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^3} + O(\frac{1}{n^5}))) \\
 &= \sin(n\pi + \frac{\pi}{2n} + O(\frac{1}{n^3})) \\
 &= (-1)^n \sin(\frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^3}))
 \end{aligned}$$

~~Nu au calculer~~

~~on la série $\sum \frac{1}{2n}$ diverge d'après le critère de Riemann~~

donc la série $\sum \sin(\pi \sqrt{n^2+2})$ diverge