# FEUILLE DE T.D. N° 2

*Algèbre linéaire*

**Exercice 1.** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans une base $(e_1, e_2, e_3)$ est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ et de $\mathrm{Im} f$.
2. Noyau et image sont-ils supplémentaires ?
3. Déterminer une matrice inversible $P$ telle que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 2.** Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Montrer que l'endomorphisme $f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X],\ P \mapsto P' + P$ est bijectif.
2. Déterminer le noyau de l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X],\ P(X) \mapsto X \cdot [P(X) - P(X-1)]$. L'endomorphisme $\varphi$ est-il injectif ? surjectif ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par $f$. Écrire la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, de l'endomorphisme induit par $f$ sur $\mathbb{K}_n[X]$ .
4. Même question pour $\varphi$.

**Exercice 3.** Soit $x_0$ un réel. On considère l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & P & \longmapsto & \left( \displaystyle\int_{-1}^{+1} P(t)\,dt, P(x_0), P(-x_0) \right). \end{array}$$

1. Ecrire la matrice, dans les bases canoniques, de l'application linéaire $f$.
2. Quelles sont les trois valeurs de $x_0$ pour lesquelles l'application $f$ n'est pas injective ?
   Déterminer, pour chacune de ces valeurs, une base du noyau de $f$.
3. Pour quelles valeurs de $x_0$ l'application $f$ est-elle bijective ?
   Calculer alors $f^{-1}(a, b, c)$ pour chaque $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

**Exercice 4** (**Matrices carrées de rang 1**). Soit $A$ une matrice carrée telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$.

1. En se plaçant dans une base adaptée, montrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A) \cdot A$.
2. Montrer qu'il existe deux vecteurs colonnes $U$ et $V$ non nuls tels que : $A = U \cdot V^T$. Redémontrer ainsi le résultat de la question précédente. En utilisant les vecteurs colonnes $U$ et $V$, déterminer une base de $\mathrm{Im}(A)$ et une équation de l'hyperplan $\mathrm{Ker}(A)$.

**Exercice 5.** Soient $x,\ y,\ z$ et $t$ quatre nombres réels. Calculer, *en le factorisant au maximum*, le déterminant

$$D(x,y,z,t)=\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ -x & y & -z & t \\ z & t & x & y \\ -z & t & -x & y \end{vmatrix}.$$

**Exercice 6.** Calculer, sous une forme factorisée, le déterminant

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}.$$

(Une indication ? Insérer une nouvelle ligne et une nouvelle colonne dans ce déterminant pour faire apparaître un déterminant de Vandermonde.)

**Exercice 7** (Famille libre)**.** Sur $E=\mathbb{R}_n[X]$, on définit les $n+1$ formes linéaires :

$$\phi_k : P\mapsto P^{(k)}(0) \quad \text{avec} \quad k\in\{0,\dots n\}.$$

Montrer que la famille $(\phi_0,\phi_1,\dots,\phi_n)$ est libre.

**Exercice 8** (Famille libre)**.** Soient $n$ réels $a_1<a_2<\cdots<a_n$. Montrer (de deux manières) que les $n$ fonctions définies, pour chaque $k\in[\![1,n]\!]$, par

$$f_k\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \mathrm{e}^{a_k x}$$

sont linéairement indépendantes.

**Exercice 9.** Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2+I_n$ ne soit pas inversible.

1. Montrer qu'il existe $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX=iX$ et $X\neq 0$.
2. Montrer qu'il existe $U$ et $V$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ libres tels que $AU=-V$ et $AV=U$.

**Exercice 10** (Trace & noyau de $A^TA$)**.** Soit une matrice carrée $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que le réel $\mathrm{tr}(A^T\cdot A)$ est égal à la somme des carrés de tous les éléments de la matrice $A$.
2. Montrer que : $A^TA=0 \iff A=0$.
3. Montrer que que $\mathrm{Ker}\,A=\mathrm{Ker}(A^T\cdot A)$.
4. Soit la forme linéaire

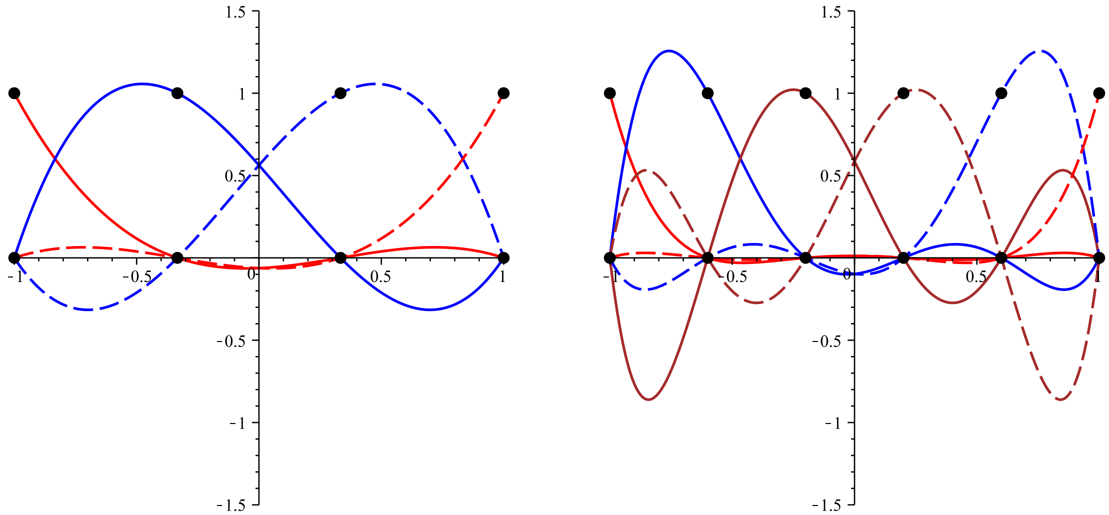
   $$\tau_A\ :\ \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R},\ M\mapsto \mathrm{tr}(A^T\cdot M).$$

   Calculer l'image $\tau_A(E_{ij})$ de chaque matrice $E_{ij}$ de la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer, de deux manières, que : la forme linéaire $\tau_A$ est nulle si, et seulement si, la matrice $A$ est nulle.

**Exercice 11** (**Polynômes de Lagrange** & déterminants de Vandermonde)**.** Soient un entier $n\geq 2$ et $n$ réels $a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n$ supposés distincts deux à deux. Soit l'application

$$\varphi\ :\ \mathbb{R}_{n-1}[X]\to\mathbb{R}^n,\ P\mapsto (P(a_1),P(a_2),\cdots,P(a_n))\,.$$

1. Montrer que l'application $\varphi$ est linéaire et déterminer son noyau.




Les polynômes de Lagrange pour $n = 4$ et $n = 6$ réels équidistants dans [-1,+1]

2. On munit les $\mathbb{R}-$espaces vectoriels $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{R}^n$ de leur base canonique : $(1, X, \cdots, X^{n-1})$ et $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ respectivement. Écrire la matrice $M$ représentant $\varphi$ dans ces bases. Quel est le déterminant de cette matrice ?
3. Les $n$ polynômes de Lagrange $L_1,\ L_2, \cdots,\ L_n$ sont définis par

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad L_i(X) = \prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

Calculer $\varphi(L_i)$ pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$.
4. En utilisant à chaque fois une des trois questions précédentes, démontrer de trois manières que l'application $\varphi$ est bijective.
5. Montrer que $(L_1, L_2, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
6. Reconnaître les polynômes

$$\sum_{i=1}^{n} P(a_i)\, L_i(X) \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} L_i(X).$$

**Exercice 12 (Les noyaux des itérés sont emboîtés).**

Soient $E$ un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f$ un endomorphisme de $E$.
1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k).$$

2. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que : $\mathrm{Ker}(f^r) = \mathrm{Ker}(f^{r+1})$.
3. Montrer que, pour tout $k \geq r$ : $\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1})$.
4. Montrer que, pour tout $k \geq r$ : $\mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^{k+1})$.
5. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^r)$ et $\mathrm{Im}(f^r)$ sont supplémentaires.

**Exercice 13.** Soient une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et l'endomorphisme

$$\varphi_A\ :\ \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ M \mapsto A \cdot M.$$

1. Montrer que l'endomorphisme $\varphi_A$ est bijectif si, et seulement si, la matrice $A$ est inversible.
2. Déterminer la trace $\operatorname{tr}(\varphi_A)$ de l'endomorphisme $\varphi_A$.

**Exercice 14** (Polynômes annulateurs)**.**

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Phi$ l'endomorphisme défini par
$$\Phi(M) = (\operatorname{tr} M)I_n + M$$
pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver un polynôme de degré 2 annulateur de $\Phi$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathcal{M}_n\mathbb{R})$ la matrice d'un projecteur et $\Phi$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par
$$\Phi(M) = PM + MP.$$
Déterminer un polynôme annulateur de $\Phi$.

**Exercice 15** (Polynômes annulateurs)**.** Soient $E$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $f : E \to E$ un endomorphisme. Montrer que : si $P$ et $Q$ sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ dont le produit est annulateur de $f$, alors $\operatorname{Im} Q(f) \subset \operatorname{Ker} P(f)$ et $\operatorname{Im} P(f) \subset \operatorname{Ker} Q(f)$.

**Exercice 16.** Soient $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'elles sont aussi semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 17** (Oral Centrale PC 2007)**.** Soient $E$ un $\mathbb{K}$–espace vectoriel, $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. On suppose que $E = F \oplus G$ et on note $p$ le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$ et $q = \mathrm{id}_E - p$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $F$ est stable par $f$ si et seulement si $q \circ f \circ p = 0$.

**Exercice 18** (Oral Centrale PSI 2014)**.** Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que :
$$\dim(\operatorname{Ker} u) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u^2) \leqslant 2\dim(\operatorname{Ker} u).$$
(On pourra utiliser l'endomorphisme induit par $u$ sur $\operatorname{Im}(u)$.)

**Exercice 19** (Hyperplans)**.** Soit $E$ un espace vectoriel. Soient $H$ et $H'$ deux hyperplans de $E$. Montrer qu'ils possèdent un supplémentaire commun.

**Exercice 20** (Matrices à diagonale strictement dominante)**.** Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$
Montrer que la matrice $A$ est inversible.

---

**Et aussi :** l'exercice 1 & le problème du DS n° 2 2024-2025.