D.S. n° 1 de mathématiques

Durée : 4 heures. Les calculatrices sont interdites.

Cet énoncé contient un exercice et un problème.

On attachera un grand soin à la rédaction. En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.

On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

— Exercice —

On note S l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que $u_0 \in \mathbb{R}_+$, $u_1 \in \mathbb{R}_+$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(u_{n+1}^2 + u_n^2\right).$$

Pour chaque $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, on désigne par $u(x,y)$ l'unique suite de S telle que $u_0 = x$ et $u_1 = y$. Pour chaque $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, on note E_λ l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ tels que la suite $u(x,y)$ tend vers λ.

1. Pour chaque valeur du réel λ, préciser si l'ensemble E_λ est vide ou non vide.

2. Dans cette question, on suppose que : $(u_n) \in S$ et (u_n) vérifie la condition

$$(C_1) \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad u_{N+2} > \max\left(u_N, u_{N+1}\right).$$

(a) On suppose N fixé comme dans (C_1). Montrer que $u_{N+2} > u_{N+1}$ et $u_{N+3} > u_{N+2}$. En déduire que $(u_n)_{n\geqslant N+1}$ est strictement croissante.

(b) Montrer que la suite (u_n) ne tend pas vers 1.

(c) Montrer que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

(d) Étudier la limite de la suite $u(2,0)$.

On admet que, de même, si $(u_n) \in S$ et (u_n) vérifie la condition

$$(C_2) \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad u_{N+2} < \min\left(u_N, u_{N+1}\right),$$

alors (u_n) converge vers 0.

3. Dans cette question, on suppose que la suite (u_n) appartient à S, est non nulle et vérifie la condition

$$(C_3) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \min\left(u_n, u_{n+1}\right) \leqslant u_{n+2} \leqslant \max\left(u_n, u_{n+1}\right).$$

On suppose de plus que $u_0 \leqslant u_1$.

(a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_0 \leqslant \cdots \leqslant u_{2k} \leqslant u_{2k+1} \leqslant \cdots \leqslant u_1$, autrement dit : la suite (u_{2k}) est croissante, la suite (u_{2k+1}) décroissante et $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{2k} \leqslant u_{2k+1}$.

(b) En déduire que la suite (u_n) converge vers 1.

On admet que, de même, si $u_0 > u_1$, alors (u_n) converge vers 1.

4. Déterminer $E_0 \cup E_1 \cup E_{+\infty}$.

5. Montrer que l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid u_n(x,0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\}$ possède une borne supérieure s et que $s \in [1,2]$.

— Problème —

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres réels non nuls.

On lui associe la suite des produits partiels $(p_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$$

On dira que le produit infini $\prod u_n$ converge si, et seulement si, la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ admet une limite finie non nulle. On notera alors sa valeur :

$$\prod_{k=1}^{\infty} u_k = \lim_{n\to\infty} p_n.$$

La partie I du problème est constituée d'exemples.

La partie II établit des critères de convergence en faisant intervenir des séries.

PARTIE I. Premiers exemples.

1. **(a)** Montrer que, si le produit infini $\prod u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.

(b) Simplifier $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$ pour tout $n \geqslant 1$. La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?

2. Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de réels non nuls telle que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

3. Simplifier $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$ pour tout $n \geqslant 1$. Étudier la limite de la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$.

4. Soit x un réel.

(a) Simplifier $\left(1-x^2\right)\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)$ pour tout $n \geqslant 1$.

(b) On suppose que $|x| < 1$. Étudier la limite de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)$.

5. Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$.

(a) Montrer que : $\sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)\cdot\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\dfrac{\theta}{2^k}\right) = \dfrac{1}{2^n}\sin\theta$ pour tout $n \geqslant 1$.

(b) En déduire que le produit infini $\prod \cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$ converge et déterminer sa valeur en fonction de θ.

PARTIE II. Critères de convergence.

On suppose dans cette partie que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement positive et on pose, pour tout $n \geqslant 1$, $\varepsilon_n = u_n - 1$.

1. **(a)** Montrer que le produit infini $\prod u_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum \ln(u_n)$ converge.
   (b) Quelle est la nature du produit infini $\prod \sqrt[n]{n}$?
2. **(a)** On suppose dans cette question que ε_n ne change pas de signe. Montrer que le produit infini $\prod u_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum \varepsilon_n$ converge.

   (b) Pour quelles valeurs du réel $\alpha > 0$ le produit infini $\prod \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge-t-il ?

   (c) Montrer que le produit infini $\prod \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$ converge et que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) = \frac{(2n+1)(2n)!^2}{4^{2n} n!^4}.$$

   En utilisant la formule de Stirling $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, déterminer la valeur de ce produit infini.
3. **(a)** On suppose dans cette question que la série $\sum \varepsilon_n$ converge. Montrer que le produit infini $\prod u_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum \varepsilon_n^2$ converge.

   (b) Quelle est la nature du produit infini $\prod \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$? Simplifier $p_{2n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{2n} \left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$ pour tout $n \geqslant 1$ et conclure.
4. On suppose dans cette question que la série $\sum |\varepsilon_n|$ converge.
   (a) Montrer que la suite des produits partiels $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.
   (b) Montrer que la série $\sum (p_n - p_{n-1})$ est absolument convergente et en déduire que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ converge.
   (c) Montrer que $\dfrac{1}{u_n} - 1 \sim -\varepsilon_n$ et en déduire que la suite des réels $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}$ converge.
   (d) Montrer que le produit infini $\prod u_n$ converge.

   On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

   (e) Montrer que, pour tout réel x positif, $|\mathrm{e}^x - 1 - x| \leqslant \dfrac{x^2}{2} e^x$.

   (f) En déduire que, pour tout réel x positif, le produit infini $\prod \left(1 + \frac{x}{n}\right) \mathrm{e}^{-x/n}$ est convergent.