Corrigé du D.S. n$^{\text{o}}$ 1 de mathématiques

— Exercice tiré de Centrale Math 1 M 1989 —

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$: si u_n tend vers λ, alors $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda^2 + \lambda^2)$ d'après la relation de récurrence, d'où $\lambda - \lambda^2 = \lambda(1-\lambda) = 0$, donc $\lambda \in \{0;1\}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0;1\}$, l'ensemble E_λ est donc vide. La suite $u(0,0)$ est constamment égale à 0 et tend donc vers 0, donc l'ensemble E_0 n'est pas vide. De même, $u(1,1)$ appartient à E_1 qui n'est donc pas vide. En conclusion : $\boxed{\text{l'ensemble } E_\lambda \text{ est non vide si, et seulement si, } \lambda \in \{0;1\}.}$

2. **(a)** On suppose N fixé comme dans (C_1). D'une part, $u_{N+2} > u_{N+1}$ car $u_{N+2} > \max(u_N, u_{N+1})$ par hypothèse. D'autre part, la relation de récurrence implique $u_{N+3} - u_{N+2} = \frac{1}{2}\left(u_{N+2}^2 - u_N^2\right)$ qui est strictement positif car $u_{N+2} > u_N$ qui est positif. Donc $u_{N+3} > u_{N+2}$.

Reste à montrer que $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \geqslant N+1$, par récurrence. On vient de prouver les deux conditions initiales. Pour l'hérédité, on suppose que $u_n > u_{n-1}$ et $u_{n+1} > u_n$. Alors $u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(u_{n+1}^2 + u_n^2\right) > \frac{1}{2}\left(u_n^2 + u_{n-1}^2\right) = u_{n+1}$. Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant N+1} \text{ est strictement croissante.}}$

(b) Par l'absurde : supposons que la suite u tend vers 1. Alors $u_n < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$ pour tout $n \geqslant N+1$ par stricte croissance. D'où $u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(u_{n+1}^2 + u_n^2\right) < u_{n+1}^2$. Or $u_{n+1}^2 < u_{n+1}$ car $u_{n+1} < 1$. D'où $u_{n+2} < u_{n+1}$: c'est absurde. Donc $\boxed{\text{la suite } u \text{ ne tend pas vers 1.}}$

(c) D'après le théorème de la limite monotone, la suite u a une limite : égale à $+\infty$ ou égale à un réel λ. D'après la question 1, $\lambda \in \{0;1\}$. Or λ ne vaut pas 1 d'après la question 2b et ne vaut pas 0 car $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et u est strictement croissante. Donc $\boxed{\text{la suite } u \text{ tend vers } +\infty.}$

(d) Si $u = u(2,0)$, alors $u_0 = 2$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$, $u_3 = 2$ et $u_4 = 4$. La condition (C_1) est vérifiée avec $N = 2$. Donc $\boxed{\text{la suite } u(2,0) \text{ tend vers } +\infty.}$

3. **(a)** Montrons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_0 \leqslant \cdots \leqslant u_{2k} \leqslant u_{2k+1} \leqslant \cdots \leqslant u_1$. Par récurrence : au rang $k = 0$, c'est l'hypothèse $u_0 \leqslant u_1$. Supposons la propriété vérifiée à un rang k. Alors u_{2k+2} est compris entre $\min(u_{2k}, u_{2k+1}) = u_{2k}$ et $\max(u_{2k}, u_{2k+1}) = u_{2k+1}$ d'après la condition (C_3), de sorte que $u_{2k} \leqslant u_{2k+2} \leqslant u_{2k+1}$. De même, $u_{2k+2} \leqslant u_{2k+3} \leqslant u_{2k+1}$. Ceci prouve la propriété au rang $k+1$.

(b) Des inégalités de la question précédente, on tire que la suite (u_{2k}) est croissante et majorée par u_1, donc convergente vers un réel a. Et que la suite (u_{2k+1}) est décroissante et minorée par u_0, donc convergente vers un réel b. De la relation de récurrence, $u_{2k+2} = \frac{1}{2}\left(u_{2k+1}^2 + u_{2k}^2\right)$, il résulte alors que $a = \frac{1}{2}\left(b^2 + a^2\right)$. Et de $u_{2k+3} = \frac{1}{2}\left(u_{2k+2}^2 + u_{2k+1}^2\right)$, que $b = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$. D'où $a = b$. Les deux suites extraites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) ont ainsi la même limite réelle a. Donc la suite u converge vers le réel a qui appartient à $\{0;1\}$ d'après la question 1. Or $a \neq 0$ par l'absurde : si $a = 0$, alors $u_0 = u_2 = 0$ par positivité de u_0 et par croissance de la suite (u_{2k}). D'où $u_1 = 0$ d'après la relation de récurrence. Alors u est la suite $u(0,0)$, c'est absurde car la suite est supposée non nulle dans cette question 3. Donc $\boxed{\text{la suite } u \text{ converge vers } 1.}$

4. Si la suite est nulle, alors elle converge vers 0. Sinon, elle vérifie l'une des conditions (C_1), (C_2) et (C_3) et tend donc vers 0, 1 ou $+\infty$. Donc $\boxed{E_0 \cup E_1 \cup E_{+\infty} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+.}$

5. L'ensemble A est non vide car $u(0,0) \in A$. Et il est majoré par 2 car :
- d'une part, $u_k(2,0) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ d'après la question 2d ;
- d'autre part (cela se prouve par récurrence sur k), $u_k(x,0) \geqslant u_k(2,0)$ pour tous $x \geq 2$ et $k \in \mathbb{N}$.

D'où $u_k(x,0) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par comparaison. Donc $\boxed{\text{l'ensemble } A \text{ possède une borne supérieure } s}$ car c'est une partie majorée et non vide de $\mathbb{R}$.

De plus, $s \leq 2$ car 2 est un majorant et s est le plus petit majorant. Enfin, si $u = u(1,0)$, alors $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = \frac{1}{8}$, $u_4 = \frac{17}{128}$ et $u_5 < \min(u_3, u_4)$. La suite u vérifie alors la condition (C_2) et tend donc vers 0. D'où $1 \in A$, donc $s \geq 1$ car s est un majorant de A. Donc $\boxed{s \in [1,2].}$

— Problème —

PARTIE I. Premiers exemples.

1. (a) Pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \frac{p_n}{p_{n-1}}$ (ce quotient est bien défini car la suite u ne s'annule pas). Comme la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite ℓ non nulle , $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{\ell}$. Donc $\boxed{\text{la suite } u \text{ tend vers } 1.}$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} = n+1$ tend vers $+\infty$, alors que la suite des réels $1 + \frac{1}{n}$ tend vers 1. $\boxed{\text{La réciproque de la question précédente est donc fausse.}}$

2. On pose $\boxed{u_n = \frac{1}{2}}$ pour chaque $n \geqslant 1$. Alors $p_n = \frac{1}{2^n}$ converge vers 0.

3. $p_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \prod_{k=2}^{n+1}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{n+2}{2(n+1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$

4. Soit x un réel.

(a) Par récurrence : $\boxed{(1-x^2)\prod_{k=1}^{n}\left(1+x^{2^k}\right) = 1 - x^{2^{n+1}}}$ pour tout $n \geqslant 1$.

(b) Comme $|x| < 1$, la suite géométrique $\left(x^{2^{n+1}}\right)$ tend vers 0. Donc $\boxed{\prod_{k=1}^{n}\left(1+x^{2^k}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-x^2}}.$

5. Soit $\theta \in]-\pi,\pi[$.

(a) On rappelle la formule de trigonométrie $\sin(2\varphi) = 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)$ pour montrer, par récurrence, que $\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n}\sin\theta$ pour tout $n \geqslant 1$: au rang $n = 1$, c'est la formule de trigo avec $\varphi = \frac{\theta}{2}$. Pour l'hérédité, on suppose la propriété vraie à un rang $n-1$:

$\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$. Or $\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)$ d'après la formule de trigo avec $\varphi = \frac{\theta}{2^n}$. Et $\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-1}}\sin\theta$.

(b) Si $\theta = 0$, alors le produit $p_n = \prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$ vaut constamment 1 et tend donc vers 1. On suppose θ non nul : grâce à l'équivalent $\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \sim \frac{\theta}{2^n}$, on sait que le facteur $\sin\frac{\theta}{2^n}$ est non nul à partir d'un certain rang, ce qui permet de diviser par $\sin\frac{\theta}{2^n}$ dans la formule de la question précédente . D'où $p_n = \frac{\sin\theta}{2^n\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = \frac{\frac{\theta}{2^n}}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}$ tend vers $\frac{\sin\theta}{\theta} \neq 0$. Dans les deux cas, p_n converge vers une limite non nulle.

Donc $\boxed{\text{le produit infini } \prod\cos\frac{\theta}{2^n} \text{ converge et sa valeur est } \prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\theta}{2^n} = \begin{cases}\frac{\sin\theta}{\theta} \text{ si } \theta\neq 0\\ 1 \text{ si } \theta = 0\end{cases}}.$

PARTIE II. Critères de convergence.

1. (a) Comme $\ln p_n = \sum_{k=1}^{n}\ln u_k$ est la somme partielle de la série $\sum\ln u_n$, la convergence de la suite $(\ln p_n)_{n\geqslant 1}$ est par définition la convergence de la série $\sum\ln u_n$. (Ces logarithmes sont bien définis car la suite u est strictement positive.) Par continuité des fonctions exponentielle et logarithme, la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite non nulle si, et seulement si, la suite $\ln p_n$ converge.

(b) La série $\sum\frac{\ln n}{n}$ diverge car, pour tout $n \geqslant 3$, $\ln\sqrt[n]{n} = \frac{\ln n}{n} \geqslant \frac{1}{n}$ qui est positif. Or la série $\sum\frac{1}{n}$ diverge. D'après le critère précédent, $\boxed{\text{le produit infini } \prod\sqrt[n]{n} \text{ est divergent.}}$

2. **(a)** $\ln(u_n) = \ln(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$, qui ne change pas de signe, d'où les séries $\sum \ln u_n$ et $\sum \varepsilon_n$ sont de même nature, donc $\boxed{\text{le produit infini } \prod u_n \text{ et la série } \sum \varepsilon_n \text{ sont de même nature}}$ d'après la question 1a.

(b) Le critère précédent s'applique car $\frac{1}{n^\alpha}$ ne change pas de signe, donc le produit infini $\prod \left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge si, et seulement si, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, c'est-à-dire $\boxed{\text{si, et seulement si, } \alpha > 1.}$

(c) Le produit infini $\prod \left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$ converge d'après le critère précédent, qui s'applique car $-\frac{1}{4n^2}$ ne change pas de signe et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. De plus,

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)(2k+1)}{4k^2} = \frac{(2n+1)(2n)!^2}{4^{2n}n!^4}.$$

En effet, le produit $\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = 1\times 3\times\cdots\times(2n-1)$ des n premiers entiers impairs s'écrit à l'aide de factorielles : pour cela il suffit de le multiplier par $2\times 4\times\cdots\times 2n = 2^n n!$ afin d'obtenir $(\ 2n\ )!$. Et comme $\prod_{k=1}^{n}(2k+1) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$, on obtient bien la formule indiquée. D'après la formule de Stirling, $\dfrac{(2n+1)(2n)!^2}{4^{2n}n!^4} \sim \dfrac{2n}{2^{4n}}\dfrac{(2n)^{4n}4\pi n}{e^{4n}}\dfrac{e^{4n}}{n^{4n}(2\pi n)^2} \sim \dfrac{2}{\pi}$. Donc

$$\boxed{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}.}$$

3. **(a)** Par développement limité, $\ln(1+\varepsilon_n) = \varepsilon_n - \frac{1}{2}\varepsilon_n^2 + o\left(\varepsilon_n^2\right)$, d'où $\ln(1+\varepsilon_n) - \varepsilon_n \sim -\frac{1}{2}\varepsilon_n^2$ qui ne change pas de signe. Les séries $\sum \varepsilon_n^2$ et $\sum(\ln(1+\varepsilon_n)-\varepsilon_n)$ sont donc de même nature. Comme la série $\sum \varepsilon_n$ converge, la série $\sum \ln(1+\varepsilon_n)$ est de même nature que la série $\sum(\ln(1+\varepsilon_n)-\varepsilon_n)$.

(b) $\boxed{\text{Le produit infini } \prod \left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) \text{ converge}}$ car les deux séries $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ convergent. De plus,

$$p_{2n} = \prod_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) = \left(\frac{2}{1}\times\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\right)\times\cdots\times\left(\frac{2n}{2n-1}\times\frac{2n-1}{2n}\right) = 1$$

pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. La suite (p_{2n}) converge donc vers 1. Or c'est une suite extraite de la suite (p_n) et la suite (p_n) converge car on a prouvé que le produit infini converge. On conclut que $\boxed{\text{le produit infini vaut 1.}}$

4. **(a)** Par l'inégalité triangulaire, $|1+\varepsilon_k| \leq 1+|\varepsilon_k|$, donc

$$|p_n| \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+|\varepsilon_k|) \leqslant \prod_{k=1}^{\infty}(1+|\varepsilon_k|) = M$$

où le produit infini converge d'après le critère de la question 2a, qui s'applique car $|\varepsilon_n|$ ne change pas de signe. On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (p_n)_{n\geqslant 1} \text{ est bornée par } M.}$

(b) $0 \leq |p_n - p_{n-1}| = |p_{n-1}(u_n - 1)| = |p_{n-1}|\,|\varepsilon_n| \leqslant M\,|\varepsilon_n|$ pour tout $n \geqslant 2$. Il en découle que la série $\sum |p_n - p_{n-1}|$ converge. La série $\sum (p_n - p_{n-1})$ converge donc absolument. Or cette série télescopique est de même nature que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$. Donc $\boxed{\text{la suite } (p_n) \text{ converge.}}$

(c) $\frac{1}{u_n} - 1 = \frac{-\varepsilon_n}{u_n}$, or $u_n = 1 + \varepsilon_n$ tend vers 1 car ε_n tend vers 0 car la série $\sum \varepsilon_n$ converge. D'où $\dfrac{1}{u_n} - 1 \sim -\varepsilon_n$, donc $\left|\dfrac{1}{u_n} - 1\right| \sim |\varepsilon_n|$.

Or $|\varepsilon_n|$ ne change pas de signe et la série $\sum |\varepsilon_n|$ converge, donc la série $\displaystyle\sum \left|\frac{1}{u_n} - 1\right|$ converge aussi.

Or $\frac{1}{u_n} = 1 + \left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$, donc la suite des réels $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}$ converge d'après la question 4b.

(d) On a prouvé à la question 4b que la suite des produits partiels p_n est convergente : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ sa limite. Il reste à montrer que $\lambda \neq 0$.

D'une part, $\displaystyle p_n \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} = 1$ pour tout $n \geqslant 1$; d'autre part, la suite des réels $\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}$ tend vers un réel μ d'après la question 4c. D'où $\lambda \cdot \mu = 1$, donc $\lambda \neq 0$. En conclusion, $\boxed{\text{le produit infini } \prod u_n \text{ converge.}}$

(e) Soit x un réel positif :

$$|\mathrm{e}^x - 1 - x| = \left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \leqslant \frac{x^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^n}{(n+2)!} \leqslant \frac{x^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^2}{2} e^x.$$

La dernière inégalité découle du fait que $2(n!) \leqslant (n+2)\,!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(f) Soit x un réel positif : d'après l'inégalité précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|e^{x/n} - 1 - \frac{x}{n}\right| \leqslant \frac{x^2}{2n^2} e^{x/n}$. D'où, en multipliant par $\mathrm{e}^{-x/n}$ qui est positif :

$$\left|1 - \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n}\right| \leqslant \frac{x^2}{2n^2}.$$

Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, d'où la série $\sum \left|1 - \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n}\right|$ converge aussi.

D'après la question 4d, $\boxed{\text{le produit infini } \prod \left(1 + \frac{x}{n}\right) \mathrm{e}^{-x/n} \text{ est convergent.}}$