

C O L L E N° 0 1

S é r i e s n u m é r i q u e s

Exercice 1 (*Nombres complexes*).

Soit un réel θ fixé de sorte que $\sin \frac{\theta}{2} \neq 0$.

Soient les deux suites $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par

$$C_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta).$$

1. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$C_n + iS_n = e^{i\frac{n\theta}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

et en déduire que la suite (C_n) est bornée.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{\cos(k\theta)}{k} = \frac{C_n}{n+1} - 1 + \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{k(k+1)}$$

et en déduire que la série $\sum \frac{\cos(k\theta)}{k}$ est convergente.

Exercice 2. Soit, pour chaque $n \geq 2$,

$$a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+\cdots+x^{n-1}} dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{\ln n}{n^2-1}.$$

- La série $\sum b_n$ est-elle convergente ?
- Calculer, pour tout $n \geq 2$, $\int_0^1 \frac{x^n}{1+(n-1)x^{n+1}} dx$.
- Quelle est la nature de la série $\sum a_n$?

Exercice 3 (*Les séries de Bertrand*).

Soient α et β deux réels strictement positifs.

- La série $\sum_{n \geq 2} \frac{n^\alpha}{(\ln n)^\beta}$ est-elle convergente ?
- On suppose que $\alpha > 1$.
 - La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ est-elle convergente ?
 - La série $\sum_{n \geq 2} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}$ est-elle convergente ?
- On suppose que $\alpha \leq 1$. La série $\sum_{n \geq 2} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}$ est-elle convergente ?
- On suppose que $\alpha < 1$. La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ est-elle convergente ?
- La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ est-elle convergente ?
 - Pour quelles valeurs de β la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\ln n)^\beta}$ converge-t-elle ?