

CORRIGÉ DE LA COLLE N° 01

Séries numériques

21 septembre 2025

Exercice 1 (*Nombres complexes*). Soient un réel θ fixé de sorte que $\sin \frac{\theta}{2} \neq 0$.

Soient les deux suites $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par

$$C_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta).$$

1. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$C_n + iS_n = e^{i\frac{n\theta}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

et en déduire que la suite (C_n) est bornée.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{\cos(k\theta)}{k} = \frac{C_n}{n+1} - 1 + \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{k(k+1)}$$

et en déduire que la série $\sum \frac{\cos(k\theta)}{k}$ est convergente.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} C_n + iS_n &= \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) + i \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) \\ &= \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} \\ &= \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \\ C_n + iS_n &= e^{i\frac{n\theta}{2}} \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \\ |C_n + iS_n| &= \left| \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right| \\ |C_n + iS_n| &\leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\theta}{2} \right|} \end{aligned}$$

Or la valeur absolue $|C_n|$ du réel C_n est inférieure au module du complexe $|C_n + iS_n| = \sqrt{C_n^2 + S_n^2}$, d'où la suite $|C_n|$ est majorée par la constante $\frac{1}{\left| \sin \frac{\theta}{2} \right|}$, donc la suite C_n est bornée.

2. C'est un télescope :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\cos(k\theta)}{k} &= \sum_{k=1}^n \frac{C_k - C_{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_k}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{C_k}{k} - \frac{C_k}{k+1} \right) + \frac{C_n}{n+1} - 1 \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{k(k+1)} + \frac{C_n}{n+1} - 1 \end{aligned}$$

D'une part la série $\sum \frac{C_k}{k(k+1)}$ est absolument convergente car $\frac{C_k}{k(k+1)} = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ car la suite C_k est bornée. D'où la suite de sommes partielles $\sum_{k=1}^n \frac{C_k}{k(k+1)}$ converge. D'autre part la suite $\frac{C_n}{n+1}$ tend vers 0 car c'est le produit d'une suite bornée C_n par une suite $\frac{1}{n+1}$ tendant vers zéro.

On en déduit que la suite des sommes partielles $\sum_{k=1}^n \frac{\cos(k\theta)}{k}$ converge car c'est la somme de deux suites convergentes. Donc la série $\sum \frac{\cos(k\theta)}{k}$ converge.

Exercice 2. Soit, pour chaque $n \geq 2$,

$$a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+\dots+x^{n-1}} dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{\ln n}{n^2-1}.$$

1. La série $\sum b_n$ est-elle convergente ?
2. Calculer, pour tout $n \geq 2$, $\int_0^1 \frac{x^n}{1+(n-1)x^{n+1}} dx$.
3. Quelle est la nature de la série $\sum a_n$?

1. $b_n = \frac{1}{n^{3/2}} \cdot \frac{\ln n}{\sqrt{n}-n^{-3/2}}$. Or $\frac{\ln n}{\sqrt{n}-n^{-3/2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. D'où $b_n = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. Or $\frac{1}{n^{3/2}}$ ne change pas de signe et la série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge. Donc la série $\sum b_n$ converge aussi.

2. On pose le changement de variable $u = x^{n+1}$, qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1]$ vers $[0, 1]$:

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+(n-1)x^{n+1}} dx = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{1}{1+(n-1)u} du = \frac{1}{n^2-1} [\ln(1+(n-1)u)]_0^1 = b_n.$$

3. Pour tout $x \in [0, 1]$, $x \geq \dots \geq x^n \geq x^{n+1}$, d'où $1+x+\dots+x^{n-1} \geq 1+(n-1)x^{n+1} > 0$.

$$\text{D'où } 0 \leq \frac{1}{1+x+\dots+x^{n-1}} \leq \frac{1}{1+(n-1)x^{n+1}}. \text{ Donc } 0 \leq a_n \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+(n-1)x^{n+1}} dx \text{ par croissance de l'intégrale.}$$

Autrement dit : $0 \leq a_n \leq b_n$. Or la série $\sum b_n$ converge. Donc la série $\sum a_n$ converge aussi.

Exercice 3 (Les séries de Bertrand).

Soient α et β deux réels strictement positifs.

1. La série $\sum_{n \geq 2} \frac{n^\alpha}{(\ln n)^\beta}$ est-elle convergente ?
2. On suppose que $\alpha > 1$.
 - (a) La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ est-elle convergente ?
 - (b) La série $\sum_{n \geq 2} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}$ est-elle convergente ?
3. On suppose que $\alpha \leq 1$. La série $\sum_{n \geq 2} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}$ est-elle convergente ?
4. On suppose que $\alpha < 1$. La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ est-elle convergente ?
5. (a) La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ est-elle convergente ?
 - (b) Pour quelles valeurs de β la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\ln n)^\beta}$ converge-t-elle ?

1. La série $\sum \frac{n^\alpha}{(\ln n)^\beta}$ diverge (grossièrement) car la suite $\frac{n^\alpha}{(\ln n)^\beta}$ ne tend pas vers zéro.

2. On suppose que $\alpha > 1$.

(a) La série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge car $\begin{cases} 0 \leq \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \leq \frac{1}{n^\alpha} \\ \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ cv} \end{cases}$.

(b) $\alpha = 1 + 2h$, avec $h > 0$. D'où $\frac{(\ln n)^\beta}{n^{1+2h}} = \frac{(\ln n)^\beta}{n^h} \cdot \frac{1}{n^{1+h}} \leq \frac{1}{n^{1+h}}$ à partir d'un certain rang. Or la série $\sum \frac{1}{n^{1+h}}$ cv. Donc la série $\sum \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}$ converge.

3. On suppose que $\alpha \leq 1$. La série $\sum \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}$ diverge car $\begin{cases} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n^\alpha} \geq 0 \\ \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ dv} \end{cases}$.

4. On suppose que $\alpha < 1$, d'où $\alpha = 1 - h$, avec $h > 0$. Alors $\frac{1}{n^{1-h} (\ln n)^\beta} = \frac{n^h}{(\ln n)^\beta} \cdot \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n}$ à partir d'un certain rang. Or la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Donc la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ diverge.

5. (a) Soit la fonction $f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$.

La fonction f est dérivable et sa dérivée $f'(x) = -\frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2}$ est négative, donc f est décroissante.

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln u = \ln(\ln x)$$

par le CDV $u = \ln x$ ($du = \frac{1}{x} dx$).

On compare série et intégrale : $S_N = \sum_{n=2}^N \frac{1}{n \ln n} \geq \int_2^{N+1} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln 2)$. Or $\ln(\ln(N+1)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty$.

D'où $S_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty$. Donc la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge.

(b) On suppose que $\beta < 1$. Alors $0 \leq \frac{1}{n \ln n} \leq \frac{1}{n (\ln n)^\beta}$. Or la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge d'après la question précédente. Donc la série $\sum \frac{1}{n (\ln n)^\beta}$ est divergente.

On suppose que $\beta > 1$. Soit la fonction $g :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x (\ln x)^\beta}$.

La fonction g est dérivable et sa dérivée $g'(x) = -\frac{(\beta + \ln x)(\ln x)^{\beta-1}}{[x (\ln x)^\beta]^2}$ est négative, donc g est décroissante.

$$\int \frac{1}{x (\ln x)^\beta} dx = \int \frac{1}{u^\beta} du = \frac{u^{-\beta+1}}{-\beta+1} = \frac{-1}{(\beta-1)(\ln x)^{\beta-1}}$$

par le CDV $u = \ln x$ ($du = \frac{1}{x} dx$). On compare série et intégrale :

$$\sum_{n=3}^N \frac{1}{n (\ln n)^\beta} \leq \int_2^N \frac{1}{x (\ln x)^\beta} dx = \frac{-1}{(\beta-1)} \cdot \left[\frac{1}{(\ln N)^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}} \right] \leq M, \text{ où } M = \frac{1}{(\beta-1)} \frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}} \text{ ne dépend pas}$$

de N . D'où la suite $\left(\sum_{n=3}^N \frac{1}{n (\ln n)^\beta} \right)_N$ des sommes partielles est croissante et majorée. Donc la série $\sum \frac{1}{n (\ln n)^\beta}$ converge.