Feuille de T.D. A

Arithmétique, polynômes & structures

Exercice 1. Soit l'intervalle $I =]-1, +1[$. Pour chaque $(x, y) \in I^2$, on définit le réel

$$x * y = \frac{x+y}{1+xy}.$$

1. Montrer que, pour tout $(x, y) \in I^2,\ x * y \in I$.
2. Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif.
3. Soit $a \in [0, 1[$. Vérifier que $A = [a, 1[$ est stable par la loi $*$.

   L'ensemble $(A, *)$ est-il un sous-groupe de $(I, *)$?
4. Montrer que la fonction $\text{th} : \mathbb{R} \to I$ est bijective et déterminer l'expression de sa réciproque th^{-1}.
5. Montrer que th est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ vers le groupe $(I, *)$.

Exercice 2. Soit A un anneau commutatif non réduit à $\{0_A\}$, soit $x \in A$. On dit que x est *nilpotent* si

$$\exists n \in \mathbb{N},\ x^n = 0_A.$$

Montrer que :

1. si x est nilpotent, alors x n'est pas inversible mais $1_A - x$ est inversible.
2. l'ensemble des éléments nilpotents de A est un idéal de A.

Exercice 3. Soit A un anneau commutatif. Si I est un idéal de A, alors on note

$$\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n \in I\}.$$

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A et que $I \subset \sqrt{I}$.
2. Soient I et J deux idéaux de A. Montrer que :
   (a) $I \cap J$ est un idéal de A ;
   (b) $I \subset J \implies \sqrt{I} \subset \sqrt{J}$;
   (c) $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.
3. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

Exercice 4. Soit n un entier naturel non nul.

1. Ecrire le cycle $(1, 2, 3, 4)$ comme la composée de transpositions de la forme $(1, i)$, où $i \in [\![1, 4]\!]$. Votre solution est-elle unique ?
2. Soient x et y deux éléments distincts de $[\![1, n]\!]$. Soit la permutation $f = (1, x) \circ (1, y) \circ (1, x)$. Calculer $f(z)$ pour chaque $z \in [\![1, n]\!]$.
3. Montrer que toute permutation de $[\![1, n]\!]$ est la composée de transpositions de la forme $(1, i)$, où $i \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 5. Soit $n \geq 2$ et le cycle $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les permutations σ de S_n telles que $\sigma \circ c = c \circ \sigma$.

Exercice 6 (**Résultant de deux polynômes**)**.** Soient deux polynômes $P = X^2 + aX + b$ et $Q = X^2 + cX + d$ de $\mathbb{C}_2[X]$ et le déterminant

$$\Delta(P, Q) = \begin{vmatrix} b & 0 & d & 0 \\ a & b & c & d \\ 1 & a & 1 & c \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que $\Delta(P, Q) = 0$ si, et seulement si, il existe deux polynômes $U \in \mathbb{C}_1[X]$ et $V \in \mathbb{C}_1[X]$ non tous nuls tels que $UP = VQ$.
2. Montrer que P et Q ont au moins une racine commune si, et seulement si, $\Delta(P, Q) = 0$.

Exercice 7. On note $\Gamma = \{0, 1\}$, $\Gamma[X]$ l'ensemble des polynômes dont les coefficients appartient à Γ et $\Gamma_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\Gamma[X]$ dont le degré est inférieur ou égal à n.

1. Quel est le cardinal de $\Gamma_n[X]$?
2. Montrer que, pour tout $P \in \Gamma_{2p}[X]$,

$$-2\frac{4^p - 1}{3} \leq P(-2) \leq \frac{4^{p+1} - 1}{3}.$$

3. Soient $P,\ Q \in \Gamma[X]$ tels que $P(-2) = Q(-2)$. Montrer que $P = Q$.
4. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{Z}$, il existe $P \in \Gamma[X]$ tel que $N = P(-2)$.

Exercice 8 (Nombre de diviseurs d'un entier – oral X ENS PSI 2011)**.**

Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et la matrice $A_n = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ définie par : $a_{i,j} = 1$ si $i|j$ et zéro sinon.

1. Montrer que $a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,n}$ est égal à la partie entière de $\frac{n}{i}$.
2. Soit s_n la somme des n^2 éléments de la matrice A_n. Déterminer un équivalent de s_n.
3. Soit d_n le nombre des diviseurs de n. Montrer que $d_1 + \cdots + d_n \sim n \ln n$.

Exercice 9. Montrer que, pour tout entier p premier supérieur ou égal à 5 :

$$24 \mid (p^2 - 1).$$

Exercice 10. Soient (a, b) dans $\mathbb{Z}^2$ et n dans $\mathbb{N}^*$ tel que que $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Montrer que :

1. $\text{pgcd}(a + b, a - b) \in \{1; 2\}$;
2. $\text{pgcd}(a^2 + b^2, a + b) \in \{1; 2\}$.