

C O L L E N° 0 2

Algèbre linéaire

Exercice 1. Soient U , V et W trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que :

- a) $U \cap V = U \cap W$;
- b) $U + V = U + W$;
- c) $V \subset W$.

1. Montrer que V est égal à W .
2. Montrer que :
 - (i) a) et b) n'impliquent pas $V = W$;
 - (ii) a) et c) n'impliquent pas $V = W$;
 - (iii) b) et c) n'impliquent pas $V = W$.

Exercice 2. On se place dans $\mathbb{R}^4$ et on considère les sous-espaces vectoriels :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0, z + t = 0\}$$

$$\text{et } G = \text{Vect} \{(1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1)\}.$$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Déterminer la matrice du projecteur p sur F parallèlement à G dans la base canonique.
3. Calculer la matrice de la symétrie s par rapport à F parallèlement à G dans la base canonique.

Exercice 3. 1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}_n$ des matrices antisymétriques et celui $\mathcal{S}_n$ des matrices symétriques sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quelles sont leurs dimensions ?
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice antisymétrique A , une unique matrice symétrique S et un unique réel $c \in \mathbb{R}$ tels que

$$M = A + S + cI_n \quad \text{et} \quad \text{Tr}(S) = 0.$$

3. En déduire la décomposition de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en la somme directe de trois sous-espaces vectoriels.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel.

1. Soient p et q deux endomorphismes de E tels que $p \circ q = q \circ p$. Montrer que :

$$\text{Ker}(p) + \text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p \circ q) \quad \text{et} \quad \text{Im}(p \circ q) \subset \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q).$$

2. Soient p et q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$. Montrer que :

- (a) $p \circ q$ est un projecteur ;
- (b) les inclusions précédentes sont des égalités.